

Kockázati Mértékek Instabilitása

Doktori értekezés

Varga-Haszonits István

Témavezető: Dr. Kondor Imre DSc, egyetemi tanár

ELTE TTK Komplex Rendszerek Fizikája Tanszék

ELTE TTK Fizika Doktori Iskola

Iskolavezető: Dr. Horváth Zalán, az MTA rendes tagja, egyetemi tanár

Statisztikus fizika, biológiai fizika és kvantumrendszerek fizikája program

Programvezető: Dr. Kürti Jenő DSc, egyetemi tanár



2009

Tartalomjegyzék

1	Bevezetés	1
I.	Irodalmi áttekintés	5
2	A portfólió elmélet alapjai	6
2.1	Értékpapír, értékpapír-piac, árfolyam és hozam	6
2.2	A Markowitz-féle portfólióválasztási modell	7
2.2.1	A Markowitz-modell feltevései	7
2.2.2	A portfólióválasztási feladat	9
3	Kockázati mértékek	13
3.1	Ad-hoc kockázati mértékek	15
3.1.1	A szórás	15
3.1.2	Az átlagos abszolút eltérés	15
3.1.3	A szemivariancia	15
3.1.4	A kockáztatott érték (VaR)	16
3.1.5	A feltételes VaR	18
3.2	Koherens kockázati mértékek	18
3.2.1	Az Expected Shortfall	19
3.3	A Markowitz-feladat általánosításai	21
4	A portfólióválasztás zajérzékenysége	23
4.1	A klasszikus Markowitz-feladat véges mintán	23
4.1.1	Az optimális portfólió becslése	23
4.1.2	A mintavételi hiba jellemzése	24
4.1.3	Zajcsökkentő módszerek	26
4.2	Egyéb kockázati mértékek zajérzékenysége	28
4.2.1	Átlagos abszolút eltérés	28
4.2.2	Historikus ES	28

5 A GARCH-modellek	32
5.1 Az egyváltozós GARCH-modellek	33
5.2 A többváltozós GARCH-modellek	34
5.2.1 Általános definíció	34
5.2.2 A CCC-GARCH-modell	35
 II. Új kutatási eredmények	 37
6 A replika-módszer	38
6.1 A Markowitz-feladat mint statisztikus fizikai modell	38
6.2 A zajérzékenység és a replika-módszer	40
6.2.1 Az állapotösszeg becült kockázat mellett	40
6.2.2 A replika-trükk	42
6.2.3 A minták feletti átlag	43
6.2.4 Az átfedési mátrix „fizikai” jelentése	44
6.2.5 A nyeregpont módszer	45
6.2.6 A replika-szimmetrikus nyeregpont stabilitása	47
 7 Vesztésgoldali kockázati mértékek parametrikus becslése	 49
7.1 A VaR és az ES paraméteres alakja	49
7.2 Az optimális portfólió	50
7.3 Az optimalizáció zajérzékenysége	51
7.3.1 A mérési hiba jellemzése	51
7.3.2 A szabadenergia-sűrűség meghatározása	52
7.3.3 Az optimum létezése	56
7.3.4 A q_0 becslési hiba	57
7.3.5 Numerikus eredmények	58
7.4 ES és VaR minimalizáció elvárt hozam mellett	60
7.4.1 Hatékony portfóliók teljes információ mellett	60
7.4.2 A hatékony portfóliók becslési hibája	62
7.5 Összefoglalás	63
 8 Portfólióválasztás GARCH-folyamat mellett	 64
8.1 A becslési hiba jellemzése	64
8.2 A becslési hiba numerikus jellemzése	66
8.3 Empirikus eredmények	71
 9 Koherencia axiómák és stabilitás	 73
9.1 Hatékony portfóliók létezése teljes információ mellett	73
9.1.1 A kockázati mértékek axiómái	73
9.1.2 Az arbitrázs fogalma	74

9.1.3	Lehetséges és hatékony portfóliók	75
9.1.4	Az optimum létezése monoton mértékek esetén	75
9.1.5	Az optimum létezése szubadditív mértékek esetén	77
9.1.6	Gyakorlati példák	79
9.2	Hatékony portfóliók létezése becslt kockázat esetén	80
9.2.1	A hatékony portfóliók becslése	81
9.2.2	A látszólagos arbitrázs	81
9.2.3	A becslt optimum létezése monoton mértékek esetén	81
9.2.4	A becslt optimum létezése szubadditív mértékek esetén	82
9.2.5	Gyakorlati példák	83
9.3	Összefoglalás	86
10	Kitekintés	88
10.1	További kutatási irányok	88
10.1.1	Elliptikus eloszlások	88
10.1.2	A rövidre eladás korlátozása	89
10.1.3	A VaR historikus becslése	89
10.1.4	Zajcsökkentő módszerek	90
10.2	A pénzügyi alkalmazásokon túl	90
10.2.1	Kvadratikus optimalizáció és portfólióválasztás	90
10.2.2	Kapocs a fizika és a matematikai statisztika között	91
11	Összefoglalás	94
	Summary	96
	Köszönetnyilvánítás	97
	Irodalomjegyzék	102

1. fejezet

Bevezetés

A pénzügyi matematika az elmúlt egy-két évtizedben az alkalmazott matematika egyik legdinamikusabban fejlődő ága volt. Matematikusok és fizikusok – és más, erős kvantitatív háttérrel rendelkező tudósok és mérnökök – százait alkalmazzák különböző bankok és pénzintézetek szerte a világon, hogy lépést tudjanak tartani a pénzügyi termékek és folyamatok rohamosan növvé komplexitásával, amihez persze éppen ezeknek a szakembereknek a tevékenysége is hozzájárult. Ráadásul a pénzügyi matematikai irodalom viharos bővülését – elsősorban talán az elmélet különleges érdekessége és eleganciája miatt – az akadémiai szféra is nagy mértékben elősegítette.

E figyelemreméltó elméleti fejlődés fényében már-már tragikomikus, hogy a világ éppen a történelem egyik legnagyobb pénzügyi válságán megy keresztül. Hogyan lehetséges, hogy évtizedeken – egyes esetekben közel száz éven át – sikeresen működő, hatalmas bankok a mai kifinomult technikai és módszertani háttér mellett egyik hónapról a másikra csődbe menjenek, magukkal rántva a globális pénzügyi rendszert és az egész világgazdaságot? A számos és szerteágazó ok közül mi itt csupán egy – de igen fontos – tényezőre fordítjuk figyelmünket, a pénzügyi kockázatmérés és -kezelés hiányosságaira.

Nyilvánvalóan hangzik, hogy a befektetési tevékenység kockázattal jár. Bármennyire is közhelyszerű azonban ez a megállapítás, meglepő módon a pénzügyi kockázat fogalmának pontos tartalma máig vita tárgya. Habár hétköznapi nyelven a legtöbb pénzügyi szereplő meg tudja fogalmazni, mit ért kockázat alatt (pl. a nyereség bizonytalanságát, a veszteség lehetőségét), mindennek a precíz és ellentmondásmentes matematikai megfogalmazása megdöbbentően nehéz.

A pénzügyi kockázat modern elméletének születését a szakma Harry Markowitz 1952-ben publikált – és 1990-ben Nobel-díjjal jutalmazott – portfólió-elméletéhez köti [1]. Markowitz a kockázatot az értékpapírok (pl. részvények) árfolyammozgásainak szórásaként definiálta, és a 90-es évekig ez maradt az uralkodó megközelítés. Emellett előszeretettel használták – és használják ma is – a kockázat jellemzésére a befektetések értékének különböző tényezőkre – pl. más pénzügyi termékek árfolyamára, kamatlábakra, stb. – vonatkozó parciális deriváltjait, hiszen ezek azt mérik, hogy mennyire vagyunk kitéve a különböző piaci tényezők ingadozásainak.

Mivel a szórás csak részben felel meg a kockázat intuitív fogalmának – hiszen nem tesz különb-

séget nyereség és veszteség között –, ezért a 90-es években a bankok tömegesen áttértek az ún. kockázatosított érték, angolul Value-at-Risk (VaR) alkalmazására, amely nem más, mint a veszteségek eloszlásának egy magas (95-99%-os) konfidenciaszint melletti kvantilise. A kockázatosított érték a nemzetközi tőkepiaci szabályozás alapjául szolgáló Basel I és Basel II egyezményekben is lényeges szerepet kapott.

Az évtized végére azonban világossá vált, hogy a VaR alkalmazása is komoly elvi problémákat vet fel. Többek között ez a tény motiválta a koherens kockázati mértékek fogalmának bevezetését, ami az első – és mindeddig az egyetlen – komoly kísérlet volt a kockázatomérés elméletének szilárd matematikai megalapozására. A pénzügyi matematikusok jó része ezt a fordulatot a kockázatomélet forradalmaként értékelte, sőt a kockázatomérés problémáját sokan ezzel jórészt megoldottnak tekintették.

A dolog érdekessége, hogy mindeközben a banki szabályozás és szakma tudomást sem tett a koherens mértékek létezéséről, a kockázatomérés és -kezelés gyakorlatában az elmúlt tíz évben nem történt érdemi változás. A pénzügyi intézeteknél alkalmazott tudósok ezalatt egyre bonyolultabb termékek kifejlesztésével és modellezésével foglalkoztak, és a modelljeik kalibrálásához az elmúlt évek pénzügyi adatait használták fel. Mivel ezek az innovatív, komplex pénzügyi termékek évről évre egyre több profitot termeltek különösebb visszaesések nélkül, az a – nyilvánvalóan téves – benyomás alakulhatott ki mind a banki szakemberekben, mind a szabályozókban, hogy a kockázatomérés -szabályozás és -kezelés jelenleg uralkodó módszerei kielégítőek. Ebben a szakmai közegben nem csoda, hogy a kockázatomélet újabb matematikai fejleményei az utóbbi tíz évben csak mérsékelt érdeklődést váltottak ki.

A néhány hónappal ezelőtti kirobban pénzügyi válság ugyanakkor világosan jelzi, hogy a kockázatomérés elmélete és gyakorlata körül semmi sincs rendben. Az elmúlt évtized eredményeképpen ráadásul a pénzügyi kockázat matematikai elmélete sajnálatos módon elszakadt a gyakorlattól, így hiába született számos, elegánsabbnál elegánsabb elmélet és konstrukció, szinte semmi tapasztalatunk nincs arról, hogy ezek a megfontolások mennyire életképesek a gyakorlatban. A publikációk jó része például az árfolyammozgások eloszlását impliciten vagy expliciten ismertnek feltételezi, és nem, vagy alig fordít gondot arra, hogy megvizsgálja a közölt eredmények érvényességét és statisztikai stabilitását abban a – valóságban mindig fennálló – helyzetben, amikor az eloszlások nem ismertek, és a modellparaméterek csak véges mintából becsülhetők.

Kutatásunk fő célja, hogy lépéseket tegyünk ennek a tendenciának a megfordítására, és a kockázatot jellemzésére és mérésére szolgáló módszertant összhangba hozzuk a realitásokkal. Ennek keretében egyrészt számos kockázati mértékre részletesen megvizsgáltuk, hogy a befektetési kockázatot csökkentését célzó eljárások mennyire érzékenyek a mintavételi zajra, másrészt felderítettük, hogy a kockázati mértékek mely tulajdonságai járulnak hozzá lényegesen a statisztikai instabilitáshoz. Eredményeink világosan jelzik többek között azt is, hogy a kockázatomérés néhány igen fontos problémájára a koherens kockázati mértékek sem adnak választ. A diskusszió során számos ponton támaszkodunk statisztikus fizikai módszerekre, ezek közül is elsősorban a rendezetlen rendszerek elméletéből származó replika-módszerre.

A dolgozat két fő részre tagolódik. Az első részben áttekintjük az értekezés hátteréül szolgáló

szakirodalmat, míg a saját kutatási eredmények kifejtésére a második részben kerül sor. Az első rész öt fejezetből áll. A 2. fejezet ismerteti a Markowitz-féle portfólió optimalizációs modellt, míg a 3. fejezetben bemutatunk néhány elméleti vagy gyakorlati szempontból jelentős kockázati mértéket. A 4. fejezetben összefoglaljuk a Markowitz-modell zajérzékenységére vonatkozó korábbi eredményeket, néhány különböző kockázati mérték mellett. Az 5. fejezet nagy vonalakban áttekinti a részvényárfolyam-mozgásokra leírására szolgáló GARCH-modelleket.

A második rész a 6. fejezettel indul, amelyben a klasszikus – a kockázatot a szórással azonosító – Markowitz-modell mintavételi hibáját vizsgáljuk replika-módszerrel. Ez tulajdonképpen a 7. fejezet módszertani előkészítéséül is szolgál, hiszen ott szintén a replikamódszert alkalmazzuk a Markowitz-probléma azon változatára, ahol a kockázatot a szórás helyett veszteségekre koncentrálnak (pl. VaR) mértékekkel számoljuk, és a kockázatot parametrikus (és nem historikus) módszerrel becsüljük. Ezt követően a 8. fejezetben visszatérünk a szóráshoz mint kockázati mértékhez, de az árfolyam-ingadozásokat normális eloszlás helyett GARCH-folyamattal modellezzük, és így vizsgáljuk meg a mintavételi hiba hatását. A 9. fejezetben kifejtjük, hogy a korábbi fejezetekben és a szakirodalomban feltárt instabilitások a kockázati mértékek milyen általános jellemzőinek a következményei, és ennek fényében végiggondoljuk, hogy egy észszerű kockázati mértéknek (legalább) milyen jellemzőkkel kell rendelkeznie. Végül a 10. fejezetben megvizsgálunk néhány lehetséges irányt, amerre az értekezés eredményei kiterjeszthetők, továbbá körvonalazzuk, hogy a portfólióválasztási feladat zajérzékenységének jellemzésére használt, statisztikus fizikára épülő módszertan miként vihető át tetszőleges más tudományterületen alkalmazott modellek statisztikai hibájának jellemzésére. Az értekezést rövid összefoglaló zárja.

I. rész

Irodalmi áttekintés

2. fejezet

A portfólió elmélet alapjai

2.1. Értékpapír, értékpapír-piac, árfolyam és hozam

A pénzügyi termékek és ügyletek világa igen sokszínű, a számtalan különböző befektetési forma áttekintése gyakran még a szakemberek számára sem könnyű, nem meglepő tehát, hogy a pénzügyi piacoknak és termékeknek nincs egységes és letisztult osztályozása és terminológiája. A különféle ügyletek számunkra lényeges jellemzőit kiragadva azonban adhatunk egy olyan stilizált definíciót, amely egyszerű, világos, és a céljainknak megfelel.

Ennek fényében *értékpapír* alatt olyan pénzügyi terméket (pl. részvény, kötvény, befektetési jegy) értünk, amely vételár ellenében szabadon átruházható. Az értékpapírok adás-vételének színtere az *értékpapír-piac*. Azt az árat, amelyért egy értékpapír egy egysége (pl. egy db. részvény) eladható/megvásárolható, az adott értékpapír *árfolyamának* nevezzük. A továbbiakban az „értékpapír” és „befektetés” kifejezések között az egyszerűség kedvéért nem teszünk különbséget, annak ellenére, hogy az utóbbi az előbbinél jóval tágabb fogalom.

Az értékpapírok árfolyamának alapvető jellemzője, hogy jövőbeli értéke véletlenszerű, és csak igen korlátozott mértékben vagy egyáltalán nem jelezhető előre. Így a pénzügyi elméletben az árfolyamokat, illetve általában a befektetések értékének az alakulását véletlen folyamatokkal modellezzük. Jelölje pl. egy adott értékpapír árfolyamát t időpontban $S(t)$. Általában feltesszük tehát, hogy (az értékpapír élettartama alatt) minden t -re $S(t)$ egy véletlen változó, és minden $k > 0$ egész számra és t_1, t_2, \dots, t_k időpontokra az árfolyam értékeinek valószínűség-eloszlása egy $f_k(t_1, t_2, \dots, t_k)$ sűrűség-függvénnyel jellemezhető.¹

Tekintsünk egy befektetőt, aki pénzt szeretne keresni oly módon, hogy t időpontban vesz egy egységnyi értékpapírt $S(t)$ árfolyamon, amelyet Δt idővel később elad. Ekkor az árfolyam megvál-

¹Fontos megjegyezni, hogy pénzügyi folyamatok esetén az idő fogalma nehezen megragadható. Az értékpapírok árfolyama ugyanis csak azokban az időpontokban értelmezhető, amikor ténylegesen lebonyolódik egy adás-vétel. Ezek az időpontok, habár igen sűrűn (másodpercenként akár többször is) követhetik egymást, véletlenszerűek és gyakran csak a bankok illetve tőzsdék nyitvatartási idejébe eshetnek. Ez számos nehézséget okozhat a pénzügyi modellezésben, ám ezektől mi a továbbiakban eltekintünk, és feltesszük, hogy az árfolyam tetszőleges időpontban létezik, és megfigyelhető.

tozása a t és a $t + \Delta t$ között időszakban

$$X(t, \Delta t) = S(t + \Delta t) - S(t), \quad (2.1)$$

míg relatív megváltozása, más néven *hozama* vagy *megtérülési rátája*

$$r(t, \Delta t) = \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{S(t)}. \quad (2.2)$$

A Δt időtartam, amelyet a befektetés *időhorizontjának* is nevezünk, elvileg bármi lehet, akár 5 perc, 1 óra, 1 nap, 2 hét, 1 év, 10 év, stb., a befektető céljától függően. Amennyiben a szövegkörnyezet alapján egyértelmű, vagy nem lényeges, hogy milyen időhorizontról van szó, a hozam jelöléséből Δt -t általában kihagyjuk, és a t időpontban induló befektetés, Δt hosszúságú időszak alatt bekövetkező árfolyamváltozást egyszerűen $X(t)$ -vel, illetve $r(t)$ -vel jelöljük.

A tapasztalat azt mutatja, hogy a befektetések értékének növekedése hosszabb távon exponenciális trendet mutat. (Ez a kamatos kamat hatásra vezethető vissza.) Emiatt a pénzügyi modellekben a vizsgálat tárgya legtöbbször az árfolyamok logaritmus, melynek Δt idő alatti megváltozását *logaritmikus hozamnak*, vagy egyszerűen *loghozamnak* nevezzük:

$$r^{\log}(t) = \log S(t + \Delta t) - \log S(t) = \log \frac{S(t + \Delta t)}{S(t)}. \quad (2.3)$$

A loghozamtól való megkülönböztetésül $r(t)$ -t szokták lineáris hozamnak is hívni. Mivel $r^{\log}(t) = \log(1 + r(t))$ ezért kis hozamokra igaz, hogy $r^{\log}(t) \approx r(t)$. Mint látni fogjuk, a portfólió-elméletben a (2.1) képlettel definiált árfolyamváltozással kényelmes dolgozni. A továbbiakban az *árfolyamváltozás*, *árfolyamingadozás*, *árfolyamfluktuáció* és *hozam* kifejezéseket ugyanabban az értelemben fogjuk használni. Az időhorizontot továbbá jelöléseinkben explicite nem tüntetjük fel, csak feltételezzük, hogy az jól definiált és ismert.

2.2. A Markowitz-féle portfólióválasztási modell

A portfólió-elmélet alapjait Harry Markowitz fektette le 1952-ben [1, 2], és ezért a munkájáért 1990-ben elnyerte a gazdaságtudományi Nobel-díjat. Ebben a részben áttekintjük a Markowitz-féle portfólióválasztási feladatot, amely a portfólió optimalizáció elméletének kiindulópontja.

2.2.1. A Markowitz-modell feltevései

1. **A befektetők racionálisak.** Ez azt jelenti, hogy a befektetők a vizsgált időtávon a lehető legkisebb kockázat mellett a lehető legnagyobb vagyonnövekedést szeretnék elérni. Ez a feltételezés igen magától értetődőnek tűnik, de nem feltétlenül igaz. Ha például húszéves időtávra fektetünk be, nem feltétlenül zavar minket, ha befektetésünk az első egy év során rosszul teljesít. A befektetési időtáv problémájától ebben a dolgozatban általában eltekintünk, de a

9. fejezet végén néhány megjegyzés erejéig még visszatérünk rá.

2. **A befektetők árelfogadók.** Ez azt jelenti, hogy a piaci szereplők számára az értékpapírok árfolyama adottság, ügyleteikkel nem képesek befolyásolni az árakat. Ez elvileg jó közelítés lehet abban a speciális esetben, ha egy befektető likvid piacokon, és a forgalomban lévő értékpapírok számához viszonyítva kis tételben kereskedik, általában azonban nem teljesül. Mivel egy portfólió nyereségét csak a benne lévő értékpapírok eladásával tudjuk realizálni, a kockázat-modellezés szempontjából kulcsfontosságú, hogy a befektető tranzakciói befolyásolják-e portfóliója értékét vagy sem.
3. **Az értékpapírok tetszőlegesen oszthatók.** Más szóval nem csak egy, kettő, száz vagy ezer részvényt vehetünk hanem pl. 0.3419 vagy 789.481 darabot is. Habár ez a feltételezés nyilvánvalóan nem igaz, nagyon nagy portfóliókra (ahol az értékpapírok száma sok millió is lehet) jó közelítésnek tekinthető.
4. **A rövidre eladás nincs korlátozva.** Rövidre eladásnak, angolul *short selling*-nek vagy gyakran egyszerűen *shortolásnak* nevezzük azt az ügylettípust, amikor a befektető olyan értékpapírt ad el, amely még nincs a birtokában. (Ez például úgy lehetséges, hogy a befektető az értékpapírokat határozott időre kölcsönveszi egy partnerétől, majd azokat a nyílt piacon azonnal értékesíti. Természetesen a kölcsön lejártakor az értékpapírokat a befektetőnek vissza kell vásárolnia, hogy partnerének időben visszaszolgáltathassa.) Mivel azonban a *short selling* igen kockázatos ügylet, a pénzügyi szabályozásban és gyakorlatban erős korlátozások vonatkoznak rá. Mint látni fogjuk azonban, a korlátok nélküli rövidre eladás feltételezése lényegesen egyszerűsíti a portfólió-modellt, ezért jó kiindulási pontként szolgál.
5. **Nincsenek tranzakciós költségek.** Tranzakciós költségnek nevezünk minden olyan költséget, amely az értékpapírok adás-vétele során a vételi áron felül felmerül. Ilyen például az értékpapírszámla-vezetési díj, a vételi jutalék, stb. Ez a feltevés jó közelítéssel igaz olyan nagybefektetőkre, akik kedvezményes díjak mellett tudnak kereskedni, és portfóliójukat nem rendezik át túl gyakran.
6. **Az árfolyamváltozások normális eloszlásúak.** Ez többek között azt jelenti, hogy a hozamok bármilyen statisztikai jellemzője (pl. kockázat) leírható legfeljebb két paraméter, a várható érték és a szórás függvényeként. Ez a feltételezés természetesen erősen leegyszerűsítő, hiszen a megfigyelések alapján az értékpapír hozamok se nem normálisak, se nem stacionáriusak. Mint azt a későbbiekben látni fogjuk, a Markowitz-féle portfólióválasztási elmélet könnyen általánosítható realizistikusabb eloszlásokra, ettől azonban fő mondanivalója nem változik.
7. **A befektetések kockázatát hozamuk szórásával mérjük.** Ez a megközelítés a kockázatot a befektetési periódus végén a realizált hozam bizonytalanságával azonosítja. E kockázatfogalom előnyeit, hátrányait és alternatíváit a 3. fejezetben részletesen megvizsgáljuk.

2.2.2. A portfólióválasztási feladat

Tegyük fel, hogy az értékpapír-piacon összesen N db. különböző fajta értékpapír érhető el. Jelölje $S_i(t)$ az i . értékpapír árfolyamát, a piac állapotát tehát egy adott időpillanatban az $\mathbf{S}(t)$ árfolyamvektor írja le. Egy befektető portfóliójának nevezzük az általa birtokolt értékpapírok összességét. A portfólió tehát reprezentálható egy N -elemű \mathbf{w} valós vektorral, melynek i . komponense, w_i megadja hogy a befektető hány egységet tart az i . értékpapírból. A portfólió t időpontbeli értékét tehát az alábbi összeg adja:

$$Y(t) = \sum_{i=1}^N w_i S_i(t). \quad (2.4)$$

Az i . értékpapír árfolyamának megváltozását egy Δt időhorizonton jelölje $X_i(t)$, tehát $X_i(t) = S_i(t + \Delta t) - S_i(t)$. Ennek megfelelően a portfólió értékének megváltozása ugyanebben az időszakban

$$X(t) = Y(t + \Delta t) - Y(t) = \sum_{i=1}^N w_i X_i(t). \quad (2.5)$$

A Markowitz-modell előfeltevései alapján az $X_i(t)$ árfolyamingadozások stacionáriusak és többváltozós normális eloszlást követnek. Ennek megfelelően az ingadozások időfüggésének jelölésétől a továbbiakban eltekintünk, és a hozamok várható értékét és kovariancia mátrixát az alábbi módon jelöljük:

$$\mu_i = \mathbb{E}[X_i], \quad (2.6)$$

$$\sigma_{ij} = \mathbb{E}[X_i X_j] - \mathbb{E}[X_i] \mathbb{E}[X_j]. \quad (2.7)$$

Feltesszük, hogy a kovariancia mátrix szigorúan pozitív definit.² Egy \mathbf{w} portfólió hozamának μ_p várható értéke és σ_p^2 varianciája tehát:

$$\mu_p = \sum_{i=1}^N w_i \mu_i, \quad (2.8)$$

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sigma_{ij} w_i w_j. \quad (2.9)$$

Tekintsünk egy befektetőt, aki egy egységnyi tőkét szeretne befektetni. Ezt a pénzüsszeget sokféleképpen szétoszthatja a rendelkezésre álló értékpapírok között, de amennyiben racionálisan gondolkodik, az azonos várható hozamú portfóliók közül előnyben fogja részesíteni azokat, melyek hozamának kisebb a szórása, illetve az azonos szórásúak közül azokat, amelyeknek nagyobb a várható hozama. Azokat a portfóliókat, amelyeknél ilyen értelemben semelyik másik portfólió sem jobb, *hatékony* portfólióknak nevezzük.

²Ez a feltevés nem csorbítja az általánosságát, hiszen egyrészt a kovariancia mátrix definíció szerint pozitív szemidefinit, másrészt ha rangja $M < N$, akkor az X_i változók közül pl. az első M db-ot kiválasztva a többi kifejezhető az előbbieket lineáris kombinációjaként. X_1, \dots, X_M kovariancia mátrixa már teljes rangú, így a feladatot visszavezettük egy M méretű piacra.

A hatékony portfóliókat tehát az alábbi feltételes optimalizációs feladat megoldásai között kell keresnünk:

$$\min_{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sigma_{ij} w_i w_j, \quad (2.10)$$

$$\sum_{i=1}^N w_i \mu_i = \mu, \quad (2.11)$$

$$\sum_{i=1}^N w_i = 1, \quad (2.12)$$

Ezt a feltételes szélsőérték problémát nevezzük Markowitz-féle portfólió optimalizációs feladatnak, vagy röviden Markowitz-feladatnak. A (2.11) egyenlet rögzíti, hogy milyen várható hozam mellett keressük a minimális kockázatú portfóliót. A (2.12) feltétel azt fejezi ki, hogy a portfólió súlyok összege megegyezik az induló tőkével, ezért ezt a feltételt *költségvetési korlátnak* is nevezzük.

A Markowitz-feladat egy kvadratikus optimalizációs probléma lineáris mellékfeltételekkel. Mivel a σ_{ij} mátrix szigorúan pozitív definit, a célfüggvény szigorúan konvex, tehát pontosan egy optimum létezik, amely a Langrange-multiplikátor módszerrel mechanikusan kiszámítható. Bevezetve az $A = \sum_{i,j} \sigma_{ij}^{-1}$, $B = \sum_{i,j} \sigma_{ij}^{-1} \mu_j$ és $C = \sum_{i,j} \sigma_{ij}^{-1} \mu_i \mu_j$ jelöléseket, a megoldás:

$$w_i^*(\mu) = \sum_{j=1}^N \sigma_{ij}^{-1} [\lambda^*(\mu) + \eta^*(\mu) \mu_i], \quad (2.13)$$

$$\lambda^*(\mu) = \frac{C - B\mu}{AC - B^2}, \quad (2.14)$$

$$\eta^*(\mu) = \frac{A\mu - B}{AC - B^2}. \quad (2.15)$$

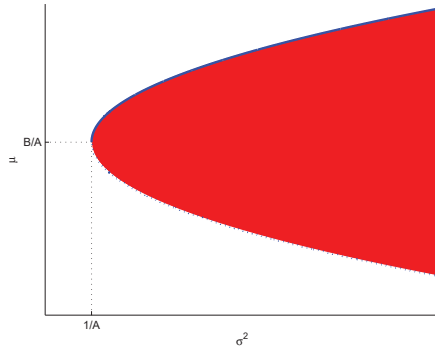
Továbbá adott μ várható hozam mellett a minimális kockázatú portfólió varianciája:

$$\sigma^{*2}(\mu) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sigma_{ij} w_i^*(\mu) w_j^*(\mu) = \frac{A}{AC - B^2} \left(\mu - \frac{B}{A} \right)^2 + \frac{1}{A}, \quad (2.16)$$

ahol $AC - B^2 > 0$.

A fenti eredmény pénzügyi jelentése a 2.1. ábra segítségével szemléltethető. Azoknak a portfólióknak a halmazát, amelyek μ várható hozamára és σ kockázatára teljesül a $\sigma^2 \geq \sigma^{*2}(\mu)$ egyenlőtlenség, *lehetséges portfólióknak* nevezzük, ugyanis ezek valósíthatók meg a (2.12) költségvetési korlát mellett. (A lehetséges hozam-kockázat kombinációkat a 2.1. ábrán piros színnel jelöltük.) A (2.10) feltételes optimalizációs feladat megoldásait *határportfólióknak* nevezzük, mivel ezekre $\sigma^2 = \sigma^{*2}(\mu)$ tehát ezek alkotják a lehetséges portfóliók határhalmazát. (Ezt a halmazt a folytonos, illetve a pontozott kék görbe jelöli).

Az ábra alapján világos, hogy $\sigma^2 > 1/A$ esetén a σ szórás minden értékéhez két határportfólió tartozik. Ezek közül a nagyobb várható hozammal rendelkező portfólió hatékony lesz, hiszen adott kockázat mellett a lehetséges portfóliók közül ennek lesz a legmagasabb a hozama. A hatékony



2.1. ábra. Lehetséges portfóliók (piros terület), határportfóliók (folytonos és pontozott kék görbe) és hatékony portfóliók (folytonos kék görbe) halmaza a hozam-kockázat síkon.

portfóliók halmazába tehát azok a portfóliók tartoznak, amelyekre $\mu > B/A$ és $\sigma^2 = \sigma^{*2}(\mu)$ feltételek egyidejűleg teljesülnek. (Ezeket az ábrán folytonos kék görbe jelöli.)

A Markowitz-féle portfólióválasztási modellnek – és egyáltalán, a portfóliók létezésének – a legfontosabb üzenete, hogy adott induló tőke és elvárt hozam mellett jobban járunk, ha befektetésünket *diverzifikáljuk*, azaz pénzünket több különféle pénzügyi termék között osztjuk meg, ahelyett hogy a teljes összeget egyetlen értékpapírba fektetnénk. Ez a Markowitz-modellben a szórás konvektitásának közvetlen következménye, melynek értelmében bármely két, X és Y hozammal rendelkező befektetési eszközre, illetve $0 \leq \alpha \leq 1$ valós számra fennáll, hogy

$$\sigma_{\alpha X + (1-\alpha)Y} \leq \alpha \sigma_X + (1-\alpha) \sigma_Y, \quad (2.17)$$

Amennyiben az X és Y közötti korreláció egységnyi, akkor a fenti képletben egyenlőség teljesül, amennyiben a korreláció egynél kisebb, akkor a baloldal szigorúan kisebb. Hétköznapi nyelven megfogalmazva tehát az X és Y kombinációja azért kevésbé kockázatos mind X -nél, mind Y -nál, mert annak a valószínűsége, hogy a két befektetés egyszerre veszteséges, általában kisebb, mint annak, hogy csak az egyik veszteséges vagy csak a másik (kivéve, ha tökéletesen korreláltak, mert ekkor mindig egyszerre veszteségesek vagy nyereségesek).

A fenti modellből tehát a meghatározható a hatékony portfóliók köre, ám abban a tekintetben nem ad eligazítást, hogy ezek közül az egyes befektetők végül is melyiket választják. E kérdés megválaszolásának egy lehetséges eszköze az ún. hasznosság vagy utilitás fogalmának bevezetése. Az elmélet lényege, hogy a befektető elégedettsége jellemezhető egy $U(\mu, \sigma^2)$ hasznosságfüggvénnyel, melyről feltesszük hogy folytonosan differenciálható, μ -ben (rögzített σ^2 mellett) monoton nő és σ^2 -

ben (rögzített μ mellett) monoton csökken. Ekkor a $\max_{\mu} U(\mu, \sigma^{*2}(\mu))$ hasznosság-maximalizáló feladat megadja az adott befektető számára legkedvezőbb hatékony portfóliót. Habár ez elvben nagyon szemléletes konstrukció, a hasznosságfüggvény létezése irreális feltételezés, hiszen a preferenciák csak igen nehezen számszerűsíthetőek, és a külső körülmények, illetve a befektető pillanatnyi hangulatának függvényében folyamatosan változnak. E nehézségek miatt az utilitás fogalmával a továbbiakban nem foglalkozunk.

A Markowitz-féle portfólióválasztási modell fő következtetése tehát a következő: egy racionális befektető diverzifikáció segítségével addig csökkenti befektetési kockázatát, amíg portfóliója hatékonyra nem válik, tehát teljesíti a $\mu > B/A$ és $\sigma^2 = \sigma^{*2}(\mu)$ feltételt. A μ várható hozamot minden befektető szubjektív módon, kockázatvállalási hajlandóságának megfelelően választja meg.

3. fejezet

Kockázati mértékek

Definiáljuk a kockázati mértékeket a következőképpen. Legyen X egy valószínűségi változó, amely egy adott értékpapír hozamát (árfolyam-változását) reprezentálja a t és $t + \Delta t$ időpontok között, valamilyen rögzített Δt időhorizontra. Az ilyen X valószínűségi változók halmazát jelölje Ω . *Kockázati mérték* alatt egy $\rho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ funkcionált értünk, és azt mondjuk, hogy az X hozamú értékpapír kockázata $\rho(X)$. A t időpontot és a Δt időhorizontot a továbbiakban adottnak tekintjük, és külön nem jelöljük.

Ez a definíció önmagában természetesen semmitmondó, hiszen ρ nagyon sokféle funkcionál lehet, de akármelyik ezek közül nem alkalmas a kockázat mérésére. A kockázati mérték helyes megválasztása a pénzügyi elmélet és gyakorlat egyik legnehezebb feladata. Ennek egyik oka, hogy maga a kockázat kifejezés jelentése más és más lehet, attól függően, hogy melyik piaci szereplő milyen célból szeretné jellemezni. Ezért a teljesség igénye nélkül áttekintünk néhány fontos szempontot a kockázat értelmezésével és a ρ mérték megválasztásával kapcsolatban:

- **A kockázat, mint a bizonytalanság mértéke.** Ez tulajdonképpen a kockázat Markowitz-féle megközelítése: a kockázatra tekinthetünk úgy, mint a befektetések jövőbeli értékével kapcsolatos bizonytalanságra. Mint látni fogjuk, a pénzügyi kockázat ennél sokrétebb fogalom.
- **A kockázat, mint a potenciális veszteségek mértéke.** A kockázat bizonytalansággal történő azonosításának legnagyobb hátránya, hogy figyelmen kívül hagy egy alapvető aszimmetriát: a befektetéseket általában csak a váratlan veszteség zavarja, a váratlan nyereség nem. Ezt a tényt nem hagyhatja figyelmen kívül egy jól megalapozott kockázat-fogalom.
- **Diverzifikációs elv.** A tőke megosztása többféle befektetés között mind a bizonytalanságot, mind a potenciális veszteségeket csökkenti (de legalábbis nem növeli), hiszen általában nincs tökéletes korreláció az értékpapírok teljesítménye között, így egy jól diverzifikált portfólióban a nagy kilengések kiátlagolódnak. Ezért csak olyan kockázat-definíció tekinthető elfogadhatónak, amely a diverzifikált befektetésekhez alacsonyabb kockázatot rendel, mint az egyedi értékpapírokhoz.

- **Összegezhetőség és összehasonlíthatóság.** A gyakorlati alkalmazhatóság szempontjából igen fontos, hogy egymástól nagyon eltérő jellegű és szerkezetű befektetések kockázata is összehasonlítható és összegezhető legyen. (Itt összegzés alatt nem egyszerűen összeadást értünk, hanem az eredő kockázat meghatározását a korrelációk és más összefüggések figyelembevételével.)
- **Tőke megfelelés.** A nemzetközi és nemzeti banki szabályozás megköveteli, hogy a váratlan veszteségek fedezetéül a pénzügyintézetek könnyen mozgósítható, ún. szavatoló tőkét tartalékoljanak, így kerülve el egy esetleges csődöt. Nyilvánvaló, hogy minél nagyobb kockázatot vállal egy bank, annál több szavatoló tőkére van szüksége, a tőkekövetelmény nagyságát megadó matematikai képlet tehát tekinthető kockázati mértékének. Világos, hogy egy jó tőke megfelelési szabálytól a fenti tulajdonságok mindegyikét elvárjuk, hiszen a bankok általában a lehető legkevesebb tőketartalék mellett próbálják megvalósítani befektetési stratégiájukat.

Szokás még a pénzügyi kockázatokat a kockázat forrása szerint is osztályozni (lásd pl. [3]). Eszerint beszélhetünk piaci (árfolyamingadozásokból adódó) kockázatról, hitelkockázatról (annak kockázata, hogy a befektető partnerei részben vagy egészben fizetéseképtelenné válnak), működési kockázatról (emberi hibából, rendszerhibából, csalásból, stb. adódó károk), szabályozási kockázatról (a szabályozási környezet tőkeletlenségeiből vagy változásaiból eredő veszteségek), likviditási kockázatról (rövid távú, nem várt értékesítési, illetve készpénzhez jutási nehézségek), stb. Bár ez a felosztás értelemszerűnek tűnik és sűrűn előfordul az irodalomban, a gyakorlatban ezek a kategóriák mesterkélték és csak nehezen választhatók szét¹, így ezzel a felosztással a továbbiakban nem foglalkozunk.

Meg kell említenünk továbbá, hogy a fent definiált kockázati mérték fogalom alapvetően statikus szemléletű, hiszen felteszi, hogy a befektető egyetlen időszakra koncentrálna, amelynek az elején kialakít egy portfóliót és azt az időszak végéig nem változtatja meg. Ebben a modellben csak az számít, hogy mennyit érnek az értékpapírok a befektetési periódus elején és végén, az nem, hogy az időszak során az árfolyamok milyen pályát futottak be. A valóságban ezzel szemben komoly jelentősége van az árfolyamok alakulásának a befektetési időszak alatt is (hiszen a kedvezőtlen árfolyammozgások csődhöz is vezethetnek), továbbá a befektetők általában nem csupán egy, hanem számos egymást követő időszakra optimalizálnak, többször átrendezve ezalatt portfóliójukat. Ezért kívánatos a kockázat fogalmát ezzel a dinamikus szemlélettel összhangban definiálni, amire számos példát találunk az irodalomban [4, 5, 6, 7]. A kockázat dinamikus megközelítését azonban a kockázatkezelési és szabályozási gyakorlatban egyelőre nem alkalmazzák, és mint látni fogjuk, ez nem is lenne indokolt, mivel már a kockázat statikus megközelítése is igen komoly elméleti és gyakorlati problémákat vet fel, s ezek vizsgálata képezi e dolgozat fő tárgyát.

A 3. fejezetben tehát áttekintjük az elméletben és gyakorlatban alkalmazott fontosabb statikus kockázati mértékeket, és összefoglaljuk a koherens kockázati mértékek elméletének alapjait.

¹Jó példa erre a közelmúltban kitört pénzügyi válság is, ahol a törvényesség határát súroló (illetve átlépő) hitelezési gyakorlat, az elhibázott pénzügyi és szabályozási politika, az ingatlanárak kedvezőtlen alakulása, a piaci szereplők hitelképességének elégtelen felmérése – számos más tényező mellett – egymással többszörösen összefonódva vezetett a válság kialakulásához.

3.1. Ad-hoc kockázati mértékek

3.1.1. A szórás

A Markowitz-elméletben a kockázat mérésére használt *szórás* (normális eloszlású hozamok mellett) jól méri a bizonytalanságot és ösztönzi a diverzifikációt, továbbá mindenféle befektetésre kiszámítható, összegezhető és összehasonlítható. Nem gaussi árfolyamingadozások esetén azonban gyengén jellemzi a kockázatot, hiszen nem írja le az eloszlás farkának lecsengését, továbbá nem tesz különbséget a veszteségek és a nyereségek között, így semmit nem mond arról, hogy egy befektetés mekkora veszteségeket okozhat. Éppen ezért arra sem alkalmas, hogy egy értelmes tőkekövetelmény-számítási eljárás alapja legyen.

3.1.2. Az átlagos abszolút eltérés

Az *átlagos abszolút eltérést* (*mean absolute deviation, MAD*) [8] a következőképpen definiáljuk:

$$MAD(X) = \mathbb{E}[|X - \mathbb{E}[X]|]. \quad (3.1)$$

E kockázati mérték sok tekintetben hasonlít a szórásra, hiszen mindkettő az átlagtól való várható eltérés mértéke. MAD előnye között szokás említeni, hogy a hosszú farkú (azaz hatványfüggvény aszimptotikájú) eloszlások esetében a szórásnál kevésbé érzékeny az extrém értékekre, és 2-nél kisebb fark-kitevőre is létezik.² Hátránya ugyanakkor, hogy a szórással ellentétben a MAD a portfólió súlyoknak nemdifferentiálható függvénye.

Ugyanakkor a szóráshoz hasonlóan a MAD-ról is elmondható, hogy bár konvex, és megfelel a diverzifikációs elvnek, továbbá a hozam bizonytalanságát jól jellemzi, nem tesz különbséget a veszteségek és nyereségek között, tehát kockázatkezelésre és tőkeszabályozási célokra sem igen alkalmas.

3.1.3. A szemivariancia

A *szemivariancia* a legrégibb aszimmetrikus kockázati mérték, amely a veszteségek felől közelíti meg a kockázat fogalmát. A szemivariancia definíciója

$$\nu^2(X) = \mathbb{E} \left[(\min\{X - \mathbb{E}[X], 0\})^2 \right], \quad (3.2)$$

amely abban különbözik X varianciájától, hogy $\nu^2(X)$ csak a várható hozamtól való negatív eltérések négyzetére átlagol. Ez a kockázati mérték tehát a szórással ellentétben figyelembe veszi azt a tapasztalati tényt, hogy az értékpapír hozamok általában aszimmetrikusak, és a veszteségek irányában nyúlnak el, tehát tipikusan $\nu(X) > \sigma(X)$.

²Vastagfarkú eloszlásról beszélünk akkor, ha az eloszlásfüggvény aszimptotikusan hatványfüggvényhez tart, azaz nagy $|x|$ érték mellett $F(x) \sim |x|^{-\alpha}$ és/vagy $1 - F(x) \sim |x|^{-\alpha}$. A vastagfarkú eloszlások fontos jellemzője, hogy a második momentum (és ezzel együtt a szórás) pontosan akkor létezik, ha $\alpha > 2$, az első momentum (és ezzel együtt az átlagos abszolút eltérés) pedig pontosan akkor, ha $\alpha > 1$.

A szemivariancia a szórás minden előnyével rendelkezik (bizonytalanság mértéke, konvexitás, összehasonlíthatóság, stb.), és ezen túlmenően érzékenyebb a veszteségekre. Tőkekövetelmény számítására ugyanakkor ν sem igazán alkalmas, hiszen a veszteségek várható nagyságáról nem nyújt közvetlen információt. Ezt a problémát igyekszik orvosolni az alábbi, szemivarianciára épülő kockázati mérték

$$\eta(X) = \nu(X) - \mathbb{E}[X], \quad (3.3)$$

amely a kockázatot a várható értéknél egy „szemi-szórás”-nyival alacsonyabb hozam mínusz egy-szeresével méri. (Némileg zavaró módon az irodalomban néha az η mértékre is szemivarianciaként hivatkoznak.) A mínusz egyszeres szorzó biztosítja, hogy a nagy negatív hozamokhoz, azaz veszteségekhez pozitív kockázat társuljon. Az η mérték tehát közvetlen kapcsolatot teremt a veszteség és a kockázat fogalma között.

3.1.4. A kockázatotott érték (VaR)

A *kockázatotott érték* [3], angolul *Value-at-Risk* (*VaR*), a pénzügyi gyakorlatban az egyik legszélesebb körben alkalmazott kockázati mérték, ezért ezzel a mértékkel részletesebben foglalkozunk. Egy X hozammal rendelkező befektetés VaR-ja tulajdonképpen nem más, mint a veszteségek (azaz $-X$) eloszlásának az α -kvantilise valamely $0 \leq \alpha \leq 1$ -re. Az α számot konfidencia-szintnek nevezzük, és tipikus értéke a gyakorlatban nagyobb mint 90% (pl. 95% vagy 99%). Amennyiben tehát X eloszlásfüggvénye $F_X(x)$ folytonos és invertálható, a kockázatotott érték definíciója $VaR_\alpha(X) = -F_X^{-1}(1 - \alpha)$.

Diszkrét (vagy szakadós eloszlásfüggvénnyel rendelkező) eloszlások esetén azonban a kvantilis értéke nem mindig egyértelmű, ezért külön szokás definiálni az alsó VaR-t (VaR_α) és felső VaR-t (VaR^α) [9]:

$$VaR_\alpha(X) = -\sup\{x | F_X(x) < 1 - \alpha\}, \quad (3.4)$$

$$VaR^\alpha(X) = -\inf\{x | F_X(x) > 1 - \alpha\}, \quad (3.5)$$

amelyekről könnyen belátható, hogy $VaR_\alpha(X) \geq VaR^\alpha(X)$, továbbá $VaR_\alpha(X) > VaR^\alpha(X)$ pontosan akkor igaz, ha $F_X(x)$ az $1 - \alpha$ értéket több x -re is felveszi, például ha az alsó és felső VaR közötti intervallumon $F_X(x)$ konstans. Ez tipikusan (de nem kizárólag) diszkrét eloszlások esetén fordul elő, illetve akkor, amikor az eloszlásfüggvényt mintából becsljük, azaz az adatgeneráló eloszlást egy diszkrét eloszlással közelítjük. Ilyen esetekben az alsó és felső VaR között mindig különbséget kell tennünk, és ajánlatos a kettő közül a pesszimistább alsó VaR-t választani a kockázat mérésére.

Amennyiben X eloszlásfüggvénye invertálható, és X második momentuma létezik, a VaR kifejezhető a várható érték és szórás lineáris függvényeként. Ehhez vezessük be a $Z = (X - \mu)/\sigma$ standardizált valószínűségi változót, ahol μ és σ az X várható értéke és szórása. Ekkor $F_X(x) = F_Z((x - \mu)/\sigma)$, ahol $F_Z(z)$ jelöli Z eloszlásfüggvényét, tehát

$$VaR_\alpha(X) = F_X^{-1}(1 - \alpha) = -\sigma F_Z^{-1}(1 - \alpha) - \mu = \sigma VaR_\alpha(Z) - \mu, \quad (3.6)$$

Az eloszlásfüggvény invertálhatósága miatt a fenti egyenlet a felső VaR-ra is érvényes. Amennyiben X (és ezzel együtt Z) eloszlása szimmetrikus (például Gauss), akkor az $F_Z^{-1}(1 - \alpha) = -F_Z^{-1}(\alpha)$ azonosság miatt

$$VaR_\alpha(X) = \sigma F_Z^{-1}(\alpha) - \mu. \quad (3.7)$$

Speciálisan, amennyiben X normális eloszlású, Z standard normális lesz, és ekkor $VaR_\alpha(Z) = \Phi^{-1}(\alpha)$, ahol $\Phi(x)$ jelöli a standard normális eloszlásfüggvényt, más néven a hibafüggvényt. Ezek az összefüggések hatékonyan felhasználhatók egyrészt analitikus levezetésekben, másrészt a VaR parametrikus becsléséhez ([3], 5. fejezet).

A VaR előnyei közé tartozik, hogy a szóráshoz hasonlóan elvileg tetszőleges befektetésre, illetve portfólióra kiszámítható, és különböző befektetési formák VaR-ja így könnyen összehasonlítható. További előnye a szórással szemben, hogy a VaR közvetlenül értelmezhető potenciális pénzvesztésként, amelynek értékét nem befolyásolja a hozameloszlás- és valószínűsűrsűrűség-függvény nyereségek felőli széle (szemben a szórással és a MAD-dal, amelyek a nyereségeket és veszteségeket egyenlő súllyal veszik figyelembe). E tulajdonságai miatt a VaR-t előszeretettel alkalmazzák mind a tökemegfelelési szabályozásban, mind a kockázatmérés és -kezelés gyakorlatában.

Van azonban a Value-at-Risknek néhány igen súlyos hiányossága, amely a széleskörű elterjedtsége ellenére megkérdőjelezi a VaR alkalmazhatóságát. Először is, a VaR figyelmen kívül hagyja a VaR-nál nagyobb veszteségek eloszlását, ami teljes mértékben ellentmond a kockázat intuitív fogalmának. Ezt legkönnyebben a következő példával illusztrálhatjuk: tekintünk két befektetést, A -t és B -t. Induláskor mindkét befektetésbe 100 Ft-tal kell beszállni, és lejáratkor a kifizetés az A esetben 95%-os valószínűséggel 110 Ft, és 5%-os valószínűséggel 90Ft, míg a B esetben 95%-os valószínűséggel ugyancsak 110 Ft, de csak 4% valószínűséggel 90Ft, 1%-os valószínűséggel pedig 0Ft, azaz az összes pénzünket elveszítjük. A (Ft-ban kifejezett) hozamok eloszlását tehát az alábbi táblázat szemlélteti:

$p(X)$	X_A	X_B
95%	10	10
4%	-10	-10
1%	-10	-100

A táblázatból első ránézésre nyilvánvaló, hogy a B befektetés kockázatosabb, hiszen 1%-os valószínűséggel minden pénzünket elbukhatjuk, az esetek maradék 99%-ban pedig ugyanannyit nyerünk vagy veszítünk vele, mint az A befektetéssel. A két befektetés 95%-os VaR-ja ugyanakkor megegyezik, akár az alsó, akár a felső VaR-t tekintjük: hiszen a (3.4) és (3.5) képletek alapján $VaR^{95\%}(A) = VaR^{95\%}(B) = -10Ft$, illetve $VaR_{95\%}(A) = VaR_{95\%}(B) = 10Ft$. A VaR tehát azonos kockázatot jelez annak ellenére, hogy a B befektetés intuitíve egyértelműen kockázatosabb.

A második lényeges hátránya a VaR-nak, hogy a hozamoknak (mint valószínűségi változóknak) nemkonvex függvénye, azaz előfordulhat, hogy valamilyen C és D befektetések X_C és X_D hozamára, illetve egy $0 < a < 1$ számra fennáll: $a \cdot VaR(X_C) + (1-a) \cdot VaR(X_D) < VaR(a \cdot X_C + (1-a) \cdot X_D)$. Ez nyilvánvalóan sérti a diverzifikációs elvet, hiszen az mondja, hogy a C -ből és D -ből a és $1-a$ súlyokkal kevert portfólió kockázata nagyobb, mint a C és D befektetések kockázata külön-külön.

3.1.5. A feltételes VaR

Feltételes VaR-nak (*Conditional Value-at-Risk*, *CVaR*) nevezzük a VaR-nál nagyobb veszteségek átlagát [10] (a VaR-t beleértve). A VaR-hoz hasonlóan létezik alsó és felső CVaR, amelyeket az alábbi módon definiálunk:

$$CVaR_\alpha(X) = -\mathbb{E}[X|X \leq -VaR_\alpha(X)], \quad (3.8)$$

$$CVaR^\alpha(X) = -\mathbb{E}[X|X \leq -VaR^\alpha(X)], \quad (3.9)$$

ahol X a vizsgált befektetés hozama egy adott időhorizonton. A fenti definícióból, illetve alsó és felső VaR tulajdonságaiból azonnal következnek az alábbi egyenlőtlenségek:

$$CVaR_\alpha(X) \geq VaR_\alpha(X), \quad (3.10)$$

$$CVaR^\alpha(X) \geq VaR^\alpha(X), \quad (3.11)$$

$$CVaR_\alpha(X) \geq CVaR^\alpha(X), \quad (3.12)$$

továbbá $CVaR_\alpha(X) = CVaR^\alpha(X)$ pontosan akkor teljesül, ha $VaR_\alpha(X) = VaR^\alpha(X)$. A CVaR fő előnye a VaR-al szemben, hogy nemcsak a veszteségek $1 - \alpha$ -kvantilisét veszi figyelembe, hanem az annál nagyobb veszteségeket is, így érzékeny az extrém eseményekre. Ugyanakkor a CVaR a VaR-hoz hasonlóan nem konvex, tehát bizonyos esetekben a diverzifikáció hatására nő.

3.2. Koherens kockázati mértékek

Az eddig bemutatott kockázati mértékek kapcsán a kockázatmérés számos problémájával szembesültünk, ilyen például a hozamingadozások irányának (veszteség vagy nyereség), az extrém veszteségeknek, vagy a diverzifikációs elvnek a figyelmen kívül hagyása. Ezek a problémák főleg abból adódnak, hogy a fent ismertetett kockázati mértékeket logikusnak tűnő, de mégis ad-hoc meggyondolások alapján vezették be, kielégítő elméleti megalapozás nélkül.

Erre a helyzetre válaszul vezette be Artzner, Delbaen, Eber és Heath a koherens kockázati mértékek fogalmát [10, 11], melynek definíciója a következő. Jelölje továbbra is a releváns valószínűségi változók (hozamok) halmazát Ω , és legyen $\rho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ egy kockázati mérték. Azt mondjuk, hogy ρ *koherens*, ha az alábbi négy feltétel mindegyikét teljesíti:

1. *Monotonitás*: Ha $X, Y \in \Omega$ és $X \geq Y$, akkor $\rho(X) \leq \rho(Y)$.
2. *Pozitív homogenitás*: Ha $X \in \Omega$ és $a > 0$, akkor $\rho(aX) = a\rho(X)$.
3. *Szubadditivitás*: Ha $X, Y, X + Y \in \Omega$, akkor $\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$.
4. *Transzláció invariancia*: Ha $X \in \Omega$ és $a \in \mathbb{R}$, akkor $\rho(X + a) = \rho(X) - a$.

A fenti négy feltételt az irodalomban koherencia *axiómáknak* is szokás nevezni, ezért mi is élünk ezzel a szóhasználattal. A monotonitási axióma definíciójában $X \geq Y$ azt jelenti, hogy bármely

ω elemi eseményre $X(\omega) \geq Y(\omega)$. Ez a feltétel tehát azt fejezi ki, hogy ha van két befektetésünk, és a másodikon minden esetben kevesebbet nyerünk vagy többet veszítünk, mint az elsőn, akkor a második befektetés kockázatosabb kell, hogy legyen.

A pozitív homogenitás teljesülése azt jelenti, hogy ha egy értékpapírba fektetett összeget a kétszeresére, háromszorosára, stb. növeljük, akkor a befektetési pozíciónk kockázata is megkétszereződik, illetve megháromszorozódik. Hangsúlyoznunk kell, hogy ez a feltevés csak akkor helytálló, ha a vizsgált értékpapír piaca likvid³ és az általunk megvásárolt/értékesített értékpapírok száma elhanyagolható az összes forgalomban lévő értékpapír számához képest (tehát nem befolyásolja lényegesen a teljes keresletet illetve kínálatot).

A szubadditivitási és a pozitív homogenitási axiómákból együttesen következik a koherens kockázati mértékek konvexitása, tehát a szubadditivitás biztosítja a diverzifikációs elv teljesülését. Ám a pozitív homogenitáshoz hasonlóan a szubadditivitás feltételezése is csak likvid piacok és relatíve kis befektetési pozíciók esetén elfogadható.

A transláció invariancia jelentése a következő: ha a befektetésünk hozamát egy a konstanssal növeljük oly módon, hogy kockázatmentes értékpapírba fektetünk, akkor a kockázatunk ugyanennyivel csökken. *Kockázatmentes értékpapírnak* nevezzük azt a befektetést, amelynek hozama minden lehetséges eseményre ugyanannyi, tehát az értékpapír hozama nem ingadozik, és zérus a valószínűsége annak, hogy a kibocsátó csődbe megy. A kockázatmentes értékpapír fogalma természetesen matematikai absztrakció, de a gyakorlatban például az államkötvények (legalábbis a stabil országok államkötvényei) vagy a jegybanki betétek jó közelítéssel kockázatmentesnek tekinthetők. A transláció invariancia axióma lényege tehát az, hogy a ρ kockázat értelmezhető legyen potenciális pénzvesztésként, és ily módon a koherens kockázati mértékek közvetlenül alkalmazhatók a tőke megfelelési szabályozásban.

Látható, hogy a koherencia axiómák nem határoznak meg egy konkrét kockázati mértéket, csak a kockázati mértékek kívánatosnak tartott tulajdonságait. Könnyen belátható az eddig tárgyalt kockázati mértékek nem koherensek. A szórás, a MAD és a „szemi-szórás” például sértik a monotonitást és a transláció invarianciát. A VaR és CVaR viszont monoton, pozitív homogén és transláció invariáns, azonban általában nemkonvex, így nem is szubadditív. A következő szakaszban azonban megismerkedünk a CVaR koherens általánosításával.

3.2.1. Az Expected Shortfall

Mint láttuk, a VaR és a CVaR a szubadditivitás kivételével az összes koherencia axiómának megfelel, továbbá a VaR-ral ellentétben a CVaR érzékeny az extrém veszteségek eloszlására. Felmerül a kérdés, hogy létezik-e olyan koherens kockázati mérték, amely megőrzi a VaR és a CVaR előnyös tulajdonságait. A legegyszerűbb ilyen kockázati mérték az *Expected Shortfall*⁴ vagy röviden

³Egy értékpapír piacát akkor nevezzük likvidnek, ha elegendő vevő és eladó van jelen a piacon ahhoz, hogy az értékpapírt az aktuális árfolyamon bármikor meg lehessen venni és el lehessen adni. A likviditás nem magától értendő dolog, egyes részvények pl. likvidebbek, mint mások, illetve bizonyos időszakokban, pl. válság idején az általában likvid piacok is beszűkülhetnek. A likviditás hiánya kockázatnövelő tényező, hiszen csökkenti az árfolyam adatok információ tartalmát, és megnehezíti az értékpapírok adásvételét is magában foglaló kockázatkezelést.

⁴Az Expected Shortfall magyarul „várható veszteség”-et jelent, de ez a kifejezés nem honosodott meg a magyar pénzügyi szaknyelvben, így mi is az angol elnevezést fogjuk használni.

ES, amely nagyon hasonló a CVaR-hoz, ám egy apró de igen lényeges vonatkozásban eltér attól [12, 13, 14].

Legyen X egy valószínűségi változó $F_X(x)$ eloszlásfüggvénnyel. Ekkor X Expected Shortfall-ja α konfidenciaszint mellett:

$$ES_\alpha(X) = -\frac{1}{1-\alpha} \int_0^{1-\alpha} F_X^-(p) dp, \quad (3.13)$$

ahol $F_X^-(p)$ jelöli az eloszlásfüggvény *általánosított inverzét*:

$$F_X^-(p) = \sup\{x | F_X(x) < p\}. \quad (3.14)$$

Egyszerűen belátható, hogy $F_X^-(p)$ tetszőleges $F_X(x)$ eloszlásfüggvényre létezik, továbbá ha $F_X(x)$ invertálható is, akkor $F_X^-(p) = F_X^{-1}(p)$, ami indokolja az általánosított inverz elnevezést.

Az ES és CVaR kapcsolatát jól jellemzi az a tény, hogy amennyiben az eloszlásfüggvénynek létezik inverze

$$\begin{aligned} ES_\alpha(X) &= -\frac{1}{1-\alpha} \int_0^{1-\alpha} F_X^{-1}(p) dp = \\ &= -\mathbb{E}[X | X \leq F_X^{-1}(1-\alpha)] = CVaR_\alpha(X) = CVaR^\alpha(X), \end{aligned} \quad (3.15)$$

hiszen ekkor $VaR_\alpha(X) = VaR^\alpha(X) = -F_X^{-1}(1-\alpha)$. A VaR esetéhez hasonlóan továbbá az ES-re is belátható, hogy ha az eloszlás invertálhatósága mellett a második momentum is létezik akkor

$$ES_\alpha(X) = \sigma ES_\alpha(Z) - \mu, \quad (3.16)$$

ami analitikus számolásokban, illetve parametrikus becslésekben egyaránt használható. Elemi számolással belátható, hogy amennyiben Z standard normális eloszlású, akkor

$$ES_\alpha(Z) = \frac{1}{(1-\alpha)\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\Phi^{-1}(\alpha)\right)^2\right], \quad (3.17)$$

ahol $\Phi(x)$ ismét a hibafüggvény.

Ha azonban az eloszlásfüggvény nem invertálható, akkor általában:

$$ES_\alpha(X) \geq CVaR_\alpha(X) \geq CVaR^\alpha(X). \quad (3.18)$$

Az ES tehát a CVaR-hoz hasonlóan szintén a legnagyobb veszteségek átlaga, de a küszöb, amely felett átlagolni kell, nem veszteségben, hanem valószínűségben van megadva. Ennek különösen akkor van jelentősége, ha X eloszlása diszkrét vagy szakad (pl. véges minta). Tegyük fel ugyanis, hogy X lehetséges kimenetelei $X_1 < X_2 < \dots < X_N$ és az X_i kimenetel valószínűsége p_i , ahol természetesen $\sum_{i=1}^N p_i = 1$. Rögzítsük α konfidenciaszintet és jelöljük K -val azt az indexet, melyre

$$\sum_{i=1}^K p_i \leq 1-\alpha < \sum_{i=1}^{K+1} p_i. \quad (3.19)$$

Ekkor a várható veszteséget a következőképpen számíthatjuk:

$$ES_\alpha(X) = - \left[\frac{1}{1-\alpha} \sum_{i=1}^K p_i X_i + \left(1 - \frac{1}{1-\alpha} \sum_{i=1}^K p_i \right) X_{K+1} \right], \quad (3.20)$$

tehát az X_{K+1} kimenetel csak akkora súllyal szerepel az átlagban, hogy a súlyok összege éppen egységnyi legyen. Speciálisan, ha $\sum_{i=1}^K p_i = 1 - \alpha$, akkor X_{K+1} súlya zérus, és $ES_\alpha(X) = CVaR_\alpha(X)$.

Habár az ES és a CVaR közötti különbség csupán technikainak tűnik, viszonylag könnyen belátható, hogy a CVaR-ral szemben az ES szubadditív [13]. Mivel a másik három axiómát az ES a CVaR-hoz hasonlóan triviálisan teljesíti, ezért az ES koherens kockázati mérték. Így tehát olyan kockázati mértékhez jutottunk, amely számos kedvező tulajdonsággal bír: a kockázatot potenciális (várható) pénzveszteségben fejezi ki, ami könnyen értelmezhetővé és globálisan összehasonlíthatóvá teszi, továbbá közvetlenül alkalmazható tőkekövetelmény számítására, valamint a VaR-ral és CVaR-ral ellentétben a diverzifikációs elvnek is megfelel, hiszen konvex.

Az irodalom az Expected Shortfall további előnyeként tartja számon azt a tényt, hogy amennyiben a Markowitz-modellben szórás helyett az ES-t minimalizáljuk véges minta alapján (illetve diszkrét hozameloszlás mellett), a portfólióválasztási feladat egy konvex lineáris optimalizációs problémával lesz ekvivalens, amelynek a megoldása számítógéppel rutinfeladat [15]. Nem csoda tehát, hogy a számos elméleti szakember a várható veszteségben látta a jövő kockázati mértékét. Ám, mint a későbbiekben látni fogjuk, az ES és általában a koherens mértékek igen nagy, és definíciójuk lényegéből fakadó instabilitást mutatnak a mintavételi hibával szemben.

3.3. A Markowitz-feladat általánosításai

Az (2.10)-(2.12) egyenletekkel definiált Markowitz-probléma természetes módon általánosítható a szórás helyett tetszőleges ρ kockázati mértékre. Tegyük fel, hogy a piacon N értékpapír közül választhatunk, és az i . értékpapír hozama X_i . Tekintsünk egy \mathbf{w} portfóliót, ekkor a portfólió kockázatát jelölje $\mathcal{R}(\mathbf{w}; \mathbf{X})$, tehát

$$\mathcal{R}(\mathbf{w}; \mathbf{X}) = \rho \left(\sum_{i=1}^N w_i X_i \right). \quad (3.21)$$

A fenti jelölés kihangsúlyozza, hogy egy portfólió kockázata a portfólió súlyok mellett az értékpapírhozamatok leíró valószínűségi változóknak is funkcionálja. A ρ kockázati mértékre vonatkozóan a Markowitz-feladat az alábbi alakot ölti:

$$\min_{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^N} \mathcal{R}(\mathbf{w}; \mathbf{X}), \quad (3.22)$$

$$\sum_{i=1}^N w_i \mu_i = \mu, \quad (3.23)$$

$$\sum_{i=1}^N w_i = 1. \quad (3.24)$$

Amennyiben $\mathcal{R}(\mathbf{w}; \mathbf{X})$ a portfólió súlyok konvex függvénye – ami ρ konvexitása esetén fennáll –, és a feladatnak van megoldása, akkor ez a megoldás egyértelmű.

Korábban említettük, hogy a rövidre eladást a gyakorlatban erősen korlátozzák, ami további mellékfeltételeket jelent a fenti portfólióválasztási feladatban. A legegyszerűbb eset a short selling teljes kizárása, ami matematikailag a $w_i \geq 0$ ($i = 1, 2, \dots, N$) feltétellel ekvivalens. Mivel a súlyok összege egységnyi, ilyenkor evidens módon minden i -re $0 \leq w_i \leq 1$.

A nemzetközi, illetve nemzeti pénzügyi szabályozás, vagy a bankok belső kockázatkezelési stratégiája sokszor további megkötésekkel próbálja ösztönözni a diverzifikációt, például az egyes értékpapírokba vagy értékpapír-csoportokba fektethető hányad korlátozásával. Ilyenkor tehát az optimalizációs probléma további $a_i \leq w_i \leq b_i$ (ahol a_i, b_i számok valós konstansok), illetve $\sum_{i \in I} \alpha_i w_i = \beta$ (ahol $I \subset \{i | 1 \leq i \leq N\}$ és az α_i, β számok valós konstansok) típusú mellékfeltételekkel bővíti.

Ezek a korlátozások sokszor megnehezítik, vagy akár lehetetlenné is teszik a probléma analitikus vizsgálatát, de numerikus módszerek segítségével a feladat általában könnyen vizsgálható.

4. fejezet

A portfólióválasztás zajérzékenysége

A valóságban természetesen nem tudjuk, hogy az értékpapírok árfolyamai milyen folyamatot követnek, a hozamok eloszlására csak a múltbeli megfigyelésekből következtethetünk. Így tehát az értékpapírok kockázatát – bármilyen módon is mérjük – nem ismerhetjük pontosan. Bizonyos előfeltételek és a rendelkezésre álló historikus adatok alapján azonban megbecsülhetjük az értékpapírok és a belőlük képzett portfóliók kockázatát, és a portfólió optimalizációs feladatot elvégezhetjük a kockázatbecslés alapján. Az így kiválasztott portfólió természetesen eltér attól, amely a valódi, adatgeneráló folyamat szerint optimális lenne, a valóságban tehát a befektetők a minimálisnál nagyobb kockázatot kell, hogy vállaljanak. A gyakorlati alkalmazások szempontjából alapvető kérdés, hogy mekkora a portfólió-becslés hibája, és mennyivel több kockázatnak vannak emiatt kitéve a piaci szereplők. Ezt a kérdést vizsgáljuk meg a 4. fejezetben.

4.1. A klasszikus Markowitz-feladat véges mintán

4.1.1. Az optimális portfólió becslése

Elsőként [16] alapján bemutatjuk, miként jellemezhető a Markowitz-féle portfólióválasztási modell zajérzékenysége. Az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy a hatékony portfóliók halmaza helyett csak a legkisebb szórású portfólió érdekel minket, tehát adott költségvetési korlát mellett a kockázat globális minimumát keressük. Ennek megfelelően a portfólió optimalizációs feladat a következőképpen módosul:

$$\min_{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sigma_{ij} w_i w_j, \quad (4.1)$$

$$\sum_{i=1}^N w_i = 1, \quad (4.2)$$

ahol N és σ_{ij} továbbra is a piacon elérhető értékpapírok számát, illetve azok hozamának kovariancia mátrixát jelöli. Könnyen belátható, hogy ennek megoldása

$$w_i^* = \frac{\sum_{j=1}^N \sigma_{ij}^{-1}}{\sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \sigma_{jk}^{-1}} \quad (4.3)$$

lesz feltéve, hogy a σ_{ij} mátrix invertálható (azaz esetünkben szigorúan pozitív definit).

A valóságban természetesen a várható értékek és a kovarianciák nem ismertek, azok értékeire a befektetők csak empirikus adatok alapján következtethetnek. Tegyük fel tehát, hogy az értékpapírok árfolyamának elmozdulásait megfigyeljük T ($T < \infty$) db. egymást követő (egyenlő hosszúságú, egymással át nem fedő) időszakban, és jelöljük x_{it} -vel az i . értékpapír árfolyamának megváltozását a t . időszak alatt (ahol $i = 1, 2, \dots, N$ és $t = 1, 2, \dots, T$). Természetesen az x_{it} hozamok szintén normális eloszlású valószínűségi változók lesznek, továbbá $\mathbb{E}[x_{it}] = \mu_i$ (minden t -re) és $\mathbb{E}[x_{it}x_{js}] - \mathbb{E}[x_{it}]\mathbb{E}[x_{js}] = \sigma_{ij}\delta_{ts}$, hiszen modellfeltevésünk szerint a hozamok időben függetlenek (autokorrelálatlanok). Ennek megfelelően a

$$\hat{\mu}_i = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T x_{it}, \quad (4.4)$$

$$\hat{\sigma}_{ij} = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (x_{it} - \hat{\mu}_i)(x_{jt} - \hat{\mu}_j) \quad (4.5)$$

formulák a várható érték és a kovariancia mátrix torzítatlan becslését adják.

Mivel most feltettük, hogy az árfolyamfluktuációk eloszlásának valódi paramétereit nem ismerjük, kénytelenek vagyunk (4.1)-be $\hat{\sigma}_{ij}$ -t helyettesíteni, így a (4.3) egyenlet alapján a valódi w_i^* optimális portfólió súlyok helyett csak a becsült \hat{w}_i^* súlyokat tudjuk meghatározni. Az optimalizáció természetesen most is csak akkor végezhető el, ha a becsült kovariancia mátrix szigorúan pozitív definit, ami azonban még akkor sem feltétlenül igaz, ha maga σ_{ij} invertálható. Ennek oka, hogy $\hat{\sigma}_{ij}$ rangja (egységnyi valószínűséggel) $\min\{N, T\}$ tehát a $T < N$ esetben $\text{rank}(\hat{\sigma}) < N$. Ugyanakkor belátható, hogy ha $T \geq N$, akkor $\hat{\sigma}_{ij}$ egy valószínűséggel szigorúan pozitív definit. A becsült optimum tehát biztosan létezik, ha $T \geq N$ és biztosan nem létezik, ha $T < N$.

4.1.2. A mintavételi hiba jellemzése

Láttuk tehát, hogy a kovarianciák ismeretének hiányában a w_i^* valódi optimum helyett csak a \hat{w}_i^* becsült optimumot tudjuk meghatározni. Fontos kérdés tehát, hogy a becsült optimális portfólió mennyire esik távol a valóditól, amit az alábbi módon jellemezhetünk [16]. Tegyük fel először is, hogy pontosan ismerjük a hozamok eloszlásának a paramétereit. (Ez a helyzet például akkor, ha tesztelési céllal azokat magunk rögzítjük.) Ekkor természetesen a \mathbf{w}^* portfólió vektort is ki tudjuk számítani. A modell ismeretében továbbá – például egy véletlenszám-generátor segítségével – képesek vagyunk szimulálni az árfolyammozgásokat, így elvileg tetszőleges számú és méretű véletlen mintát generálhatunk. Tegyük fel, hogy $\{x_{it}\}$ egy T megfigyelésből álló szimulált idősor, és képzeljük magunkat egy befektető helyébe, aki nem ismeri a várható értékeket és kovarianciákat,

csak az $\{x_{it}\}$ idősort. Ez a befektető tehát a (4.5) alapján számolt $\hat{\mathbf{w}}^*$ portfólióba fog fektetni. Egy igazi befektető sajnos nem tudja megállapítani, hogy mekkora ennek a becslült portfóliónak a valódi kockázata, mi azonban azt az eloszlás ismeretében kiszámíthatjuk: ez éppen $\sqrt{\sum_{i,j} \sigma_{ij} \hat{w}_i^* \hat{w}_j^*}$ lesz, amely egy valószínűséggel nagyobb, mint a valódi optimum kockázata: $\sqrt{\sum_{i,j} \sigma_{ij} w_i^* w_j^*}$. A becslés hibáját tehát jól jellemezhetjük az alábbi mennyiséggel

$$q_0 = \frac{\sqrt{\sum_{i,j} \sigma_{ij} \hat{w}_i^* \hat{w}_j^*}}{\sqrt{\sum_{i,j} \sigma_{ij} w_i^* w_j^*}}. \quad (4.6)$$

Nyilvánvalóan $q_0 \geq 1$, ahol az egyenlőség véges mintaméret mellett zérus valószínűséggel teljesül. Így a $q_0 - 1$ szám megadja, hogy a hiányos információval rendelkező befektető hány százalékkal vállal nagyobb kockázatot amiatt, hogy az optimumot véges minta alapján kell becsülnie.

A $\hat{\sigma}_{ij}$ becslült kovariancia mátrixtól való függése miatt maga q_0 is mintáról mintára ingadozik, tehát véletlen változó. q_0 momentumait megvizsgálva képet kaphatunk róla, hogy a Markowitz-modell mennyire érzékeny a mintavételi zajra. A főbb eredmények [16] numerikus vizsgálatai alapján (lásd 4.1. ábra):

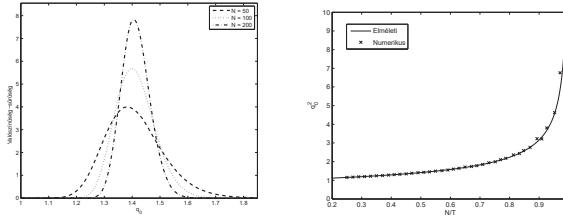
- Az $N/T = \text{const}$ és $N \rightarrow \infty$ limeszben q_0 varianciája eltűnik.
- Ugyanebben a limeszben $\mathbb{E}[q_0] = (1 - N/T)^{-1/2}$.
- A fenti eredmények tetszőleges (nemszinguláris) σ_{ij} kovariancia mátrixra fennállnak.

Termodinamikai analógiával élve N tekinthető egy fizikai rendszer méretének, T pedig egy másik extenzív paraméternek. A továbbiakban alkalmazzuk az $r = N/T$ jelölést. Ebben az értelmezésben az $N \rightarrow \infty$ konstans r mellett nem más, mint a termodinamikai limesz. A fenti eredmények alapján tehát a termodinamikai limeszben q_0 mintáról mintára történő fluktuációi megszűnnek, így $q_0 = \mathbb{E}[q_0] = (1 - r)^{-1/2}$. Más szóval q_0 önátlagoló.

A fentiek egyik fontos következménye, hogy amint $T \rightarrow N$ (azaz $r \rightarrow 1$), a mérési hiba végtelenhez tart. Ez összhangban van azzal a ténnyel, hogy ha $N > T$, akkor a becslült kovariancia-mátrix szingulárisává válik, és így a portfólió optimalizációs feladatnak nem lesz megoldása. Ugyanakkor, ha T nagyobb mint N , de nem sokkal, akkor ugyan $\hat{\sigma}_{ij}$ invertálható lesz, de a megfigyelések alacsony száma miatt a becslési hiba, azaz q_0 nagyon nagy lesz. Az idősor hosszát és ezzel a rendelkezésre álló információt növelve (azaz r -t csökkentve) q_0 közelíteni fog 1-hez, majd a $T \rightarrow \infty$ határesetben el is éri azt.

A véges mintán történő portfólió optimalizációs probléma tehát algoritmikus fázisátalakulást mutat, amelynek a kontrollparamétere $r = N/T$. A feladatnak van egy megoldható és egy nem megoldható fázisa, az átalakulás kritikus pontja $r_c = 1$, ahol q_0 kritikus viselkedést mutat $-1/2$ exponenssel.

Habár a fenti következtetések eredetileg Monte Carlo szimuláción alapulnak, q_0 analitikusan is vizsgálható. Elsőként az $\mathbb{E}[q_0] = (1 - N/T)^{-1/2}$ összefüggést vezették le a véletlen mátrixok elméletének segítségével [17]. Később q_0 teljes eloszlását is sikerült meghatározni az eredeti Markowitz-feladat keretein belül (tehát tetszőleges hatékony portfólióra) standard statisztikai módszerekkel



4.1. ábra. *Bal oldal:* q_0 valószínűsűrűsége Monte-Carlo szimulációk alapján, N különböző értékeire, $N/T = 0.5$ mellett. Jól látható, hogy N növekedtével a szórás csökken. *Jobb oldal:* q_0 átlaga Monte-Carlo szimulációk alapján N/T különböző értékeire, $N = 100$ mellett. A szimulált értékek jól illeszkednek a $\mathbb{E}[q_0] = (1 - N/T)^{-1/2}$ görbére.

[18]. Ezen kívül, mint azt a 6. fejezetben látni fogjuk, a rendezetlen rendszerek elméletében kidolgozott replika módszer is alkalmas q_0 tanulmányozására.

Azt láttuk tehát, hogy ha például kétszer annyi megfigyelésünk van, mint az értékpapírok száma (tehát $r = N/T = 1/2$), akkor $\mathbb{E}[q_0] = \sqrt{2} \approx 1.41$, vagyis a becsült optimum kockázata várhatóan kb. 41%-kal haladja meg a valódi optimumot, míg ugyanez az arány $r = 9/10$ esetén már mintegy 216%. Figyelembe véve, hogy N realisztikus esetben akár több száz is lehet, míg a befektetési időhorizont akár néhány hónap is, a fenti eredmények szerint gyakran sok évtizednyi megfigyelés sem elég ahhoz, hogy a mérési hibát elfogadható szintre csökkentjük. Ráadásul a valóságban ilyen időtávon az eloszlás még megközelítőleg sem stacionárius, a becslési hiba tehát még a modell keretei között jóval nagyobb lehet.

4.1.3. Zajcsökkentő módszerek

Az előző szakaszban láttuk, hogy pusztán a minta kovariancia mátrix alapján becsült optimális portfólió igen érzékeny a mintavételi zajra. Amennyiben azonban bizonyos mértékű a priori információ is a rendelkezésünkre áll, a kovariancia mátrix és ezzel az optimális portfólió becslése jelentős mértékben javítható. A zajcsökkentő módszerek részletes tanulmányozása a jelen dolgozatnak nem tárgya, így csak futólag tekintünk át néhány módszert, a teljesség igénye nélkül.

- **Főkomponens analízis.** E módszer lényege az a feltevés, hogy a piaci árfolyammozgások nagy része megmagyarázható (az értékpapírok teljes számához viszonyítva) kevés számú fundamentális faktorial, a maradék fluktuáció pedig nem tartalmaz érdemi információt. Ezt alátámasztja, hogy a valódi árfolyammozgások esetében a kovariancia mátrix spektruma nagyjából három részre osztható [19]: az első „csoportba” a legnagyobb sajátérték tartozik, amely lényegesen nagyobb az összes többi sajátértéknél; a másodikba kevés számú, közepes nagyságú sajátérték tartozik, amely pl. részvénytapiacok esetében az iparági hatásokról tartalmaznak információt; míg a harmadik csoportba tartozik a spektrum maradéka, amely

tipikusan a sajátértékek több, mint 90%-át foglalja magában, és amely nagyon kevés hasznos információt tartalmaz az árfolyamok együttmozgásáról.

Amennyiben előre tudjuk a lényeges (1. és 2. csoportba tartozó) sajátértékek, azaz a főkomponensek számát, a mintából becsült kovarianciamátrixot „megszűrhetjük” oly módon, hogy spektrálfelbontásában a 3. csoportba tartozó sajátértékeket azok átlagával helyettesítjük (megőrizve ezzel a mátrix nyomát). A 3. csoportbeli, „zajos” sajátértékek elkülönítése a lényegesektől nemtriviális probléma, amelyben hatékony segítséget nyújt a véletlen mátrixok (azon belül a Wishart-mátrixok) elmélete [19, 20, 21, 22]. Szimulációk segítségével kimutatható, hogy ez a módszer lényegesen csökkentheti a q_0 becslési hibát [16], amely még $N > T$ esetben is véges lesz. (Ennek oka egész egyszerűen az, hogy a főkomponens analízis segítségével becsült kovariancia mátrix $N > T$ esetben sem szinguláris.)

- **„Lengyel módszer”.** Ezt a tisztán véletlen-mátrix elméleten alapuló módszert lengyel fizikusok dolgozták ki [17, 23], ezért egyszerűen „lengyel módszer”-ként hivatkozunk rá. Az eljárás a minta kovariancia mátrixok mint véletlen mátrixok ún. spektrális momentumait használja, ami lehetővé teszi a spektrum zajos részében elrejtett információ részleges visszaállítását is. A főkomponens analízishez hasonlóan ez a módszer is szükségessé tesz bizonyos (nem túl erős) a priori feltevéseket az árfolyammozgások szerkezetéről.
- **Bayesian Shrinkage módszerek.** Ez a Stein-féle becslésen [24] alapuló módszer család Le-doit és Wolf munkáiban [25, 26, 27] jelent meg. Lényege, hogy az \hat{s}_{ij} mintakovariancia mátrix mellett bevezetünk valamilyen, általában egyszerű szerkezettel rendelkező \hat{f}_{ij} mátrixot, az ún. bayes-i priort (amelynek az elemei esetleg függhetnek \hat{s}_{ij} -től), és a becsült kovariancia mátrixot ezek konvex kombinációjaként állítjuk elő: $\hat{\sigma}_{ij} = \alpha \hat{f}_{ij} + (1 - \alpha) \hat{s}_{ij}$, ahol $0 \leq \alpha \leq 1$. Az α nagyságát úgy választjuk meg, hogy várható értékben minimalizálja a becsült és valódi kovarianciamátrix elemei különbségének négyzetösszegét. Ez elvileg természetesen csak a valódi kovariancia mátrix ismeretében tehető meg, de belátható, hogy az optimális α véges mintából konzisztens módon becsülhető. Néhány tipikus példa a bayes-i priorra: identitás mátrix; diagonális mátrix a becsült varianciákkal a főátlóban; diagonális mátrix a becsült varianciák számtani átlagával a főátlóban; a főátlóban a varianciák számtani átlagát, a mellékátlóban a kovarianciák számtani átlagát tartalmazó mátrix, stb.

A fenti módszerek mindegyike hatékonyan képes csökkenteni q_0 értékét, továbbá garantálja, hogy az optimum $T < N$ esetén is becsülhető. Habár a fenti szűrő eljárások különféle matematikai módszereken alapulnak, zajcsökkentő hatásuk nagyrészt annak köszönhető, hogy a legkisebb sajátértékeket megnövelik, így azok a mátrix inverziója során kisebb hibát okoznak, mint az eredeti, zérushoz közeli sajátértékek.

4.2. Egyéb kockázati mértékek zajérzékenysége

4.2.1. Átlagos abszolút eltérés

A (3.1) képlettel definiált átlagos abszolút eltérés (MAD) zajérzékenysége a szóráshoz hasonlóan jellemezhető szimulációs módszerrel [28]. A q_0 mennyiség ekkor a becslt és a valódi optimális portfólió MAD-jének hányadosa lesz, amelyről belátható, hogy normális eloszlás esetén a $\mathbb{E}[|X|] = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma(X)$ összefüggés miatt éppen megegyezik a (4.6) kifejezéssel. A numerikus vizsgálatok szerint a MAD q_0 -ja szintén önátlagoló, és $\mathbb{E}[q_0]$ csak az N/T hányadostól függ. Az eredmények azt mutatják, hogy a $q_0^{\text{MAD}} > q_0^\sigma$, tehát a MAD a szórásnál valamivel instabilabb kockázati mérték. A becslési hiba aszimptotikus viselkedése azonban mindkét kockázati mérték esetében ugyanolyan: az $N/T \rightarrow 0$ határesetben az $(1 - N/T)^{-1/2}$ formulának megfelelően divergál.

A MAD szóráshoz viszonyított, fokozott zajérzékenysége geometriailag a következő módon indokolható [29]. A szórás egyenlőkockázatú (nívó-) felületei a portfóliók vektorterében ellipszoidok lesznek, amelynek az alakja, illetve pozíciója véletlen mintából becslt szórás esetén mintáról mintára ingadozik. Az optimumot ennek az ellipszoidnak és a költségvetési korlát által meghatározott síknak az érintési pontja adja, amely az ellipszoid „billegését” követve ugrál. Mivel a szórás nívófelületei „simák” (azaz a célfüggvény differenciálható), ezért az ellipszoid kismértékű megváltozásai nyomán az érintési pont sem változik jelentősen. A MAD esetében az egyenlő kockázatú felületek azonban poliéderek lesznek, amelynek tipikusan valamelyik csúcsában lesz az optimum. Ha lecseréljük a becsléshez használt mintánkat, poliéderünk helyzete megváltozik, és könnyen előfordulhat, hogy az érintési pont az egyik csúcsról egy másikra ugrik át, így tehát az optimum akkor is jelentősen megváltozhat, ha MAD nívófelületei csak kis mértékben mozdultak el, ami magyarázza a MAD magasabb zajérzékenységet a szóráshoz viszonyítva.

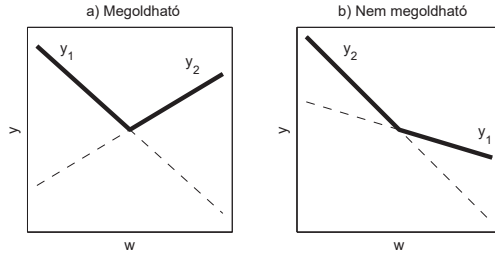
A fenti, szimulációk segítségével kapott eredményeket Ciliberti és Mézard a rendezetlen rendszerek elméletében széles körben alkalmazott replika módszerrel is levezette [30], megerősítve a numerikus számítások következtetéseit.

4.2.2. Historikus ES

Legyen X valamely értékpapír hozama. Tegyük fel, hogy X eloszlását nem ismerjük, de T egymást követő időszakban ismerjük az X_1, X_2, \dots, X_T realizált hozamokat. Jelölje π az $\{1, 2, \dots, T\}$ egész számoknak azt a permutációját, amelyre $X_{\pi(1)} \leq X_{\pi(2)} \leq \dots \leq X_{\pi(T)}$. Legyen továbbá $K = \lfloor (1 - \alpha)T \rfloor$ (ahol $\lfloor x \rfloor$ az x valós szám alsó egészrészét jelöli), ekkor az ES historikus becslőfüggvényét (3.20) alapján a következőképpen definiáljuk:

$$\widehat{ES}_\alpha(X) = -\frac{1}{T(1-\alpha)} \sum_{k=1}^K X_{\pi(k)} - \left(1 - \frac{K}{T(1-\alpha)}\right) X_{\pi(K+1)}. \quad (4.7)$$

Megmutatható, hogy amennyiben egy N értékpapírból álló piacon a szokásos költségvetési korlát mellett keressük egy T nagyságú $\{x_{it}\}$ minta alapján becslt historikus ES minimumát,



4.2. ábra. Az $y_1(w)$ és $y_2(w)$ egyenesek ellentétes (bal oldal) és azonos (jobb oldal) előjelű meredekség esetén. A vastag vonal jelzi a két egyenes maximumát, azaz a maximális veszteséget w függvényében.

akkor a probléma ekvivalens az alábbi lineáris programozási feladattal [15]:

$$\min_{u, v, w} \left(\frac{1}{T(1-\alpha)} \sum_{t=1}^T u_t + v \right), \quad (4.8)$$

$$u_t \geq -v - \sum_{i=1}^N w_i x_{it}, \quad (4.9)$$

$$u_t \geq 0, \quad (4.10)$$

$$\sum_{i=1}^N w_i = 1. \quad (4.11)$$

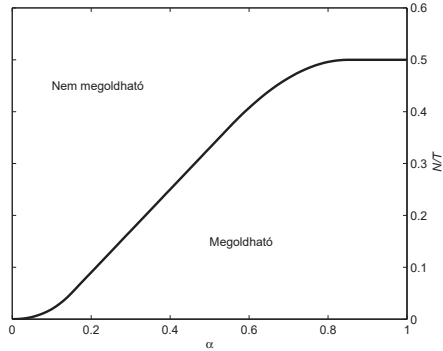
A historikus ES speciális esete az $\alpha = 100\%$ eset, amikor a kockázatot egyszerűen a mintában realizált legnagyobb veszteséggel mérjük. Ezt a kockázati mértéket maximális veszteségnek (Maximal Loss, ML) is nevezik, amelyre definíció szerint teljesül, hogy $ML(X) = -X_{\pi(1)}$. A maximális veszteség minimalizációja, az ún. minimax probléma az alábbi egyszerű lineáris programozási feladatra vezet [31]:

$$\min_{u, w} u, \quad (4.12)$$

$$u \geq -\sum_{i=1}^N w_i x_{it}, \quad (4.13)$$

$$\sum_{i=1}^N w_i = 1. \quad (4.14)$$

Kondor, Pafka és Nagy megvizsgálták a historikus ES és ML zajérzékenységet is igen meglepő



4.3. ábra. Az ES optimalizációs probléma megoldhatóságának fázis diagramja az N/T - α síkon.

eredményre jutottak [28]. Míg a mintából becsült szórás esetén $T \geq N$ mellett a portfólióválasztási feladat egy valószínűséggel megoldható, addig az ES és ML minimuma csak egynél kisebb valószínűséggel létezik! Ráadásul az optimum létezése a minta függvénye, akárhogyan is választjuk meg a T mintanagyságot, bizonyos mintákon a becsült ES-nek (illetve ML-nek) lesz minimuma, míg más mintákon nem.

A minimax feladat esetén az $N = 2$ és $T = 2$ esetben a probléma jól illusztrálható. A maximális veszteség w és $1 - w$ portfólió súlyok mellett $\max\{y_1, y_2\}$ lesz ahol

$$y_1 = -wx_{11} - (1 - w)x_{21} = w(x_{21} - x_{11}) - x_{21}, \quad (4.15)$$

$$y_2 = -wx_{12} - (1 - w)x_{22} = w(x_{22} - x_{12}) - x_{22}. \quad (4.16)$$

A 4.2. ábrán ábrázoltuk a fenti két egyenest abban a két esetben, amikor az egyenesek meredeksége ellentétes, illetve azonos előjelű. Világos, hogy ellentétes előjelű meredekségek esetén a maximális veszteségnek van minimuma (bal oldali ábra), míg azonos előjelű meredekségek esetén nincs (jobb oldali ábra), mert a maximális veszteség $-\infty$ felé divergál. Ez pontosan akkor következik be, ha vagy $x_{11} > x_{21}$ és $x_{12} > x_{22}$, vagy pedig $x_{11} < x_{21}$ és $x_{12} < x_{22}$.

Általános esetben belátható, hogy a minimax probléma megoldhatóságának a valószínűsége

$$p = \frac{1}{2^{T-1}} \sum_{k=N-1}^{T-1} \binom{T-1}{k}, \quad (4.17)$$

ha $N < T$, egyébként $p = 0$. Annak a valószínűsége tehát, hogy nem létezik megoldás, $N < T$ esetén minden véges N -re és T -re pozitív. Továbbá abban a határesetben, amikor $N \rightarrow \infty$ és $T \rightarrow \infty$, de

N/T konstans, azt találjuk, hogy $p = 1$, ha $N/T < 1/2$, egyébként $p = 0$. Nagy N értékek mellett tehát a megfigyelések számának legalább kétszeresen kell meghaladnia az értékpapírok számát ahhoz, hogy az optimum egyáltalán létezzen (és akkor a becslési hibával még nem is foglalkoztunk).

Az ES esetén hasonló a helyzet, de itt a megoldhatóság valószínűsége N -n és T -n kívül az α konfidenciaszinttől is függ. Az $N \rightarrow \infty$, $T \rightarrow \infty$ és N/T konstans limeszben azt találjuk, hogy az $r = N/T$ és α értékétől függően a megoldhatóság valószínűsége vagy zérushoz vagy egyhez konvergál. A megoldható és nem megoldható tartományt elválasztó görbét az r - α síkon a 4.3. ábra mutatja. Nagy (kb. 0.8 feletti) α értékekre N/T kritikus értéke a minimax (azaz $\alpha = 1$) esethez hasonlóan $1/2$ körüli, alacsonyabb α értékek mellett pedig a megoldhatóság biztosításához szükséges mintanagyság a konfidenciaszint csökkenésével egyre nagyobb. Ez igen meglepő eredmény annak fényében, hogy minél kisebb α , a (4.7) egyenletben annál több megfigyelés szerepel az összegben. Ezt a látszólagos ellentmondást és az instabilitás mélyebb okát a 9. fejezetben magyarázzuk meg.

5. fejezet

A GARCH-modellek

Az eddigiek során feltettük, hogy az értékpapírhozámok az egymást követő időszakokban függetlenek és azonos eloszlásúak, a megfigyelések azonban mindezt nem igazolják. Habár például a valós részvény-árfolyammozgások igen bonyolultak és sokfélék lehetnek a piaci, iparági, földrajzi, gazdasági és egyéb tényezők következtében, néhány jellemző vonást a legtöbb esetben megfigyelhetünk.

Tegyük fel hogy Δt időközönként megfigyeljük egy adott részvény árfolyamát, és minden egyes időszakra meghatározzuk, hogy mennyivel változott meg az árfolyam az adott időszakban. Jelölje ezeket a megváltozásokat x_1, x_2, x_3, \dots . A múltbeli tapasztalatok azt mutatják, hogy általában:

- Az árfolyammozgások hosszú farkú eloszlást követnek.
- Az egymást követő időszakok árfolyamváltozásai között a (lineáris) korreláció Δt növekedtével igen gyorsan csökken, és $\Delta t > 15$ perc esetén már elhanyagolható.
- Az átlagtól való abszolút ($|x_1 - \mu|, |x_2 - \mu|, \dots$), vagy négyzetes ($(x_1 - \mu)^2, (x_2 - \mu)^2, \dots$) eltérések viszont szignifikáns korrelációt mutatnak, az árfolyamfluktuációk tehát időben nem függetlenek.
- Az árfolyammozgások szórása (volatilitása) időben változik, kisebb és nagyobb volatilitású időszakok követik egymást. A volatilitás továbbá perzisztens, azaz ha egy adott időszakban a részvényárfolyam nagyot ugrott, akkor valószínűleg a következő időszakban is nagyot fog (de az ugrás iránya lehet azonos és ellentétes is).
- Az árfolyamelmozdulások eloszlása aszimmetrikus, az extrém árfolyamesések valószínűbbek, mint az extrém emelkedések. Ez az aszimmetria ráadásul nagyobb volatilitású időszakokban általában erőteljesebben nyilvánul meg.

A GARCH-folyamatok éppen a valódi árfolyammozgások fent felsorolt tulajdonságait próbálják megragadni viszonylag egyszerű matematikai eszközökkel. A GARCH-modellek első változatát, az ARCH-folyamatot Robert F. Engle vezette be [32], amiért 2003-ban megkapta a közgazdasági Nobel-díjat.

5.1. Az egyváltozós GARCH-modellek

A GARCH-modellek első változatai egyváltozós folyamatokat modelleztek. Ezek bemutatását az *ARCH-modellnél* (*Autoregressive Conditional Heteroscedasticity*) valamivel általánosabb, és gyakrabban alkalmazott *GARCH-modellel* (*Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity*) kezdjük, amelyet Engle tanítványa, Tim Bollerslev vezetett be [33]. Legyen x_t egy diszkrét véletlen folyamat ($t = 1, 2, \dots$). Azt mondjuk, hogy x_t *GARCH*(p, q)-folyamatot követ, ha létezik olyan ν_t standard normális eloszlású, és időben független ($\mathbb{E}[\nu_t \nu_s] = \delta_{ts}$) folyamat, amelyre

$$x_t = \mu + \epsilon_t, \quad (5.1)$$

$$\epsilon_t = \sqrt{h_t} \nu_t, \quad (5.2)$$

$$h_t = \gamma + \sum_{i=1}^p \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j h_{t-j}, \quad (5.3)$$

$$\gamma, \alpha_i, \beta_j \geq 0.$$

Amennyiben minden j -re $\beta_j = 0$, akkor azt mondjuk, hogy az x_t *ARCH*(p)-folyamatot követ.

Az (5.1) és (5.2) egyenletek együtt azt fejezik ki, hogy x_t minden t -re μ várható értékű és $\sqrt{h_t}$ szórású normális eloszlást követ. Az ϵ_t folyamat tehát nem más, mint az x_t átlag körüli fluktuációja, h_t pedig a fluktuációk erőssége, amely az (5.3) egyenlet értelmében h_t illetve ϵ_t késleltetett értékeitől függ, tehát maga is véletlen folyamat. Mivel az (5.3)-ban szereplő modellparaméterek nemnegatívak, ezért ha a t időpontot megelőzően a variancia nagy volt, akkor várhatóan h_t is nagy lesz és ezt csak az tudja ellensúlyozni, ha ϵ_t (ennek megfelelően ν_t) több perióduson keresztül kellően kicsi marad. Mivel ennek a valószínűsége relatíve alacsony (de nem elhanyagolható), ezért a variancia perzisztens lesz, azaz csak lassan változik.

Mivel ν_t független h_t -től és egyenlő valószínűséggel pozitív, illetve negatív, $\mathbb{E}[x_t] = \mu$ tetszőleges t -re fennáll. Az (5.3) egyenlet alapján továbbá a t időszak varianciája ismert, ha már tudjuk a t -t megelőző időszakok elmozdulásait és varianciáit, amit matematikailag a

$$h_t^2 = \mathbb{E}[x_t^2 | \epsilon_{t-1}, \dots, \epsilon_{t-p}, h_{t-1}, \dots, h_{t-q}] - \mu^2 \quad (5.4)$$

egyenlet fejez ki. Ezért szokás h_t -t feltételes varianciának is nevezni, és innen származik az ARCH illetve GARCH-modellek a neve is. Az x_t hozam tehát csak a t időszakot megelőző realizált hozamok és varianciák ismeretében, azaz feltételesen tekinthető normális eloszlásúnak. Belátható, hogy x_t feltétel nélküli eloszlása nem normális, sőt vastag farkú, amelynek feltétel nélküli varianciája:

$$\text{Var}(x_t) = \mathbb{E}[x_t^2] - \mu^2 = \frac{\gamma}{1 - \sum_{i=1}^p \alpha_i - \sum_{j=1}^q \beta_j}, \quad (5.5)$$

amely csak akkor véges, ha

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{j=1}^q \beta_j < 1, \quad (5.6)$$

továbbá az x_t folyamat autokorrelálatlan, tehát ha $t \neq s$, akkor $\mathbb{E}[x_t x_s] - \mu^2 = 0$. Az ϵ_t^2 folyamat viszont az (5.3) egyenlet miatt már autokorrelált lesz. A GARCH(1,1)-folyamatra például ϵ_t^2 autokorrelációs függvénye (feltéve, hogy x_t -nek létezik negyedik momentuma):

$$C(t, s) = \frac{\mathbb{E}[\epsilon_t^2 \epsilon_s^2]}{\mathbb{E}[\epsilon_t^2] \mathbb{E}[\epsilon_s^2]} = \kappa \cdot (\alpha_1 + \beta_1)^{|t-s|}, \quad (5.7)$$

ahol κ -val jelöltük az ϵ_t (egyben az x_t) folyamat negyedik kumulánsát (csúcosság vagy kurtózis). A pozitív autokorreláció következménye, hogy az egymást követő időszakokban a feltételes variancia nagy valószínűséggel hasonló nagyságrendű lesz, azaz pongyolán fogalmazva a volatilitás perzisztens. Ezzel beláttuk, hogy a GARCH(p,q)-folyamat képes reprodukálni a részvényárfolyammozgások 5.1. szakasz elején felsorolt kvalitatív jellemzőit. Kivétel ez alól az utolsó, aszimmetriára vonatkozó megfigyelés, amelyet azonban a GARCH-modell további általánosításaisaival (pl. ARCH-M [34], EGARCH [35], TGARCH [36], AGARCH [37]) figyelembe lehet venni.

A modell paramétereit megfigyelt idősorok alapján maximum likelihood módszerrel becsülhetők. A modellbe bevont késleltetések számának (azaz p és q értékének) meghatározására számos módszer van, amelyek különféle hipotézisvizsgálatokon alapulnak. Ezek ismertetésére nem térünk ki, de mindegyikben közös, hogy annyi késleltetést enged meg, amennyi mellett az α_i és β_j paraméterek szignifikánsan különböznek zérustól. A tapasztalatok szerint a GARCH-modellben a $p = 1$ és $q = 1$ választás már kielégítő eredményt ad, míg az ARCH-modellben p általában nagyobb 1-nél – éppen ez a tény motiválta a GARCH-folyamatok bevezetését.

A GARCH-folyamat segítségével tehát az árfolyammozgásokat időben változó szórású normális eloszlással modellezzük, így egy jól definiált kockázati mérték alapján a 3. fejezetben bemutatott módszerekkel meghatározhatjuk az adott értékpapír kockázatát, amely szintén ingadozni fog egyik időszakról a másikra. Amennyiben a kockázatot például a szórással mérjük, a t . időszakban az x_t kockázata éppen $\sqrt{h_t}$ lesz. Ugyanakkor h_t és μ segítségével (3.7) alapján a kockáztatott érték is könnyen meghatározható: $Var_\alpha(x_t) = \sqrt{h_t} \Phi^{-1}(\alpha) - \mu$.

5.2. A többváltozós GARCH-modellek

5.2.1. Általános definíció

Tekintsünk most egy N dimenziós folyamatot, és a t időpontban a folyamat i . komponensét jelölje x_{it} . Azt mondjuk, hogy az x_{it} MVGARCH(p,q)-folyamat [38], ha van olyan ϵ_{it} N -változós Gauss-folyamat, amely teljesíti az alábbi egyenleteket:

$$x_{it} = \mu_i + \epsilon_{it}, \quad (5.8)$$

$$\mathbb{E}[\epsilon_{it}] = 0, \quad (5.9)$$

$$\mathbb{E}[\epsilon_{it} \epsilon_{js}] = \delta_{ts} h_{ij,t}, \quad (5.10)$$

$$h_{ij,t} = \gamma_{ij} + \sum_{k=1}^p \alpha_{ij}^{(k)} \epsilon_{i,t-k} \epsilon_{j,t-k} + \sum_{k=1}^q \beta_{ij}^{(k)} h_{ij,t-k}, \quad (5.11)$$

ahol a γ_{ij} , $\alpha_{ij}^{(k)}$, $\beta_{ij}^{(k)}$ mátrixok minden k -ra szimmetrikusak. $h_{ij,t}$ -t, amely az egyváltozós eset feltételes varianciájának általánosítása, feltételes kovariancia-mátrixnak hívjuk.

A fenti modellnek azonban van egy súlyos hátulütője, hiszen (5.11) annyi szabad paramétert tartalmaz, hogy a modell illesztése általában már elméletileg sem lehetséges. Ahhoz, hogy értelmes többváltozós modellt kapjunk, a szabad paraméterek számát tehát drasztikusan le kell csökkentenünk, ami a feltételes kovarianciamátrix struktúrájára, illetve az időfejlődésére vonatkozó megszorításokkal érhető el. Ezek az extra feltételek természetesen igen sokfélék lehetnek, és ennek megfelelően számos különböző többváltozós GARCH modell létezik.

A legegyszerűbb ezek közül a CCC-GARCH- (Constant Conditional Correlation GARCH) modell [39], amely konstans feltételes korrelációs mátrixot, és az (5.3) egyenletnek megfelelően alakuló feltételes varianciákat feltételez. Ennek általánosítása a DCC-GARCH (Dynamical Conditional Correlation GARCH) folyamat [40, 41, 42], amely a CCC-GARCH-tól abban tér el, hogy a feltételes korrelációs mátrix egy egyszerű (kevés szabad paraméterrel leírható) véletlen folyamatot követ. További példák többváltozós GARCH-modellekre: BEKK-modell [43], Faktor GARCH-modell [44], Ortogonális GARCH-modell [45, 46, 47]. A többváltozós GARCH-modellekről továbbá [48] nyújt részletes összefoglalást.

5.2.2. A CCC-GARCH-modell

A továbbiakban a többváltozós GARCH-modellek legegyszerűbb változatát ismertetjük, a már említett CCC-GARCH-modellt. Az egyszerűség kedvéért tekintsük a CCC-GARCH(1,1)-folyamatot, amely a fent definiált általános MVGARCH-folyamattól abban tér el, hogy a feltételes kovarianciamátrix viselkedését az (5.11) egyenlet helyett a

$$h_{ii,t} = \gamma_i + \alpha_i \epsilon_{i,t-1}^2 + \beta_i h_{ii,t-1}, \quad (5.12)$$

$$h_{ij,t} = \rho_{ij} \sqrt{h_{ii,t} h_{jj,t}} \quad (5.13)$$

egyenletek írják le, ahol ρ_{ij} konstans mátrix, amelyet feltételes korrelációs mátrixnak hívunk. Ebben a modellben tehát az x_{it} változók külön-külön egyváltozós GARCH(1,1)-folyamatot követnek, míg korrelációik determinisztikusak és időben állandók, továbbá definíció szerint $\rho_{ii} = 1$ minden i -re. Ez egyébként megfelel annak a megfigyelésnek, hogy a részvényárfolyam-mozgások közötti korrelációk általában (de nem feltétlenül) hosszabb időskálán változnak, mint a volatilitás.

A μ_i várható érték, az α_i , β_i , γ_i GARCH paraméterek és a ρ_{ij} feltételes korrelációs mátrix empirikus adatokból két lépésben becsülhetők. Először minden egyes változóra illesztünk egy egyváltozós GARCH(1,1)-modellt, így megkapjuk a becsült $\hat{\mu}_i$ várható értékeket és a becsült $\hat{\alpha}_i$, $\hat{\beta}_i$ és $\hat{\gamma}_i$ GARCH paramétereket, egyúttal a becsült $\hat{h}_{ii,t}$ feltételes varianciákat. Ezután meghatározzuk mindegyik változó ún. standardizált reziduumát:

$$\hat{\nu}_{it} = \frac{x_{it} - \hat{\mu}_i}{\sqrt{\hat{h}_{ii,t}}}, \quad (5.14)$$

amelynek segítségével megbecsülhetjük a konstans korrelációs mátrixot

$$\hat{\rho}_{ij} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \hat{\nu}_{it} \hat{\nu}_{jt}. \quad (5.15)$$

Ez a mátrix ugyan szigorú értelemben véve nem korrelációs mátrix, hiszen semmi sem garantálja, hogy a főátlóban minden elem 1 legyen, de belátható, hogy $\hat{\rho}_{ij}$ a ρ_{ij} korrelációs mátrix konzisztens becslése, azaz a $T \rightarrow \infty$ határesetben $\hat{\rho}_{ij} - \rho_{ij}$ szórása eltűnik. A $\hat{\rho}_{ij}$ mátrix és a $\hat{h}_{ii,t}$ feltételes varianciák alapján így megbecsülhetjük a feltételes kovariancia mátrixot is:

$$\hat{h}_{ij,t} = \hat{\rho}_{ij} \sqrt{\hat{h}_{ii,t} \hat{h}_{jj,t}}. \quad (5.16)$$

Ezt a módszert tehát alkalmazhatjuk a kovariancia mátrix rövid távú előrejelzésére. Tegyük fel ugyanis, hogy T db. egymást követő múltbeli időszakban megfigyeltük az x_{it} árfolyammozgásokat, és a T . időszak éppen ma ér véget. Ekkor a mai napon kezdődő, $T + 1$. időszak feltételes kovariancia mátrixa, azaz $\hat{h}_{ij,T+1}$ az (5.16) egyenlet segítségével, pusztán a T hosszúságú idősor alapján megbecsülhető. Ez a becslés aztán felhasználható a kockázat előrejelzésére és portfólióválasztásra, amelynek a zajérzékenységét a későbbiekben részletesen megvizsgáljuk.

II. rész

Új kutatási eredmények

6. fejezet

A replika-módszer

Minden sokváltozós minimalizációs problémához hozzárendelhető egy statisztikus fizikai modell, amely zérus hőmérsékleten éppen a minimalizációs probléma megoldását vagy megoldásait adja. Ez legegyszerűbben úgy tehető meg, hogy a célfüggvényt (az esetleges Lagrange-multiplikátoros tagokkal együtt) egy fizikai rendszer Hamilton-függvényének tekintjük, bevezetünk egy fiktív hőmérsékletet, ezek segítségével felírhatjuk a kanonikus állapotösszeget, és kiszámíthatjuk a szabad-energiát. Zérus hőmérsékleten a rendszer a Hamilton-függvény minimumába kerül, ami éppen az eredeti optimalizációs probléma megoldását szolgáltatja. (Ezen az elven alapul például a szimulált hűtés néven ismert numerikus optimalizációs módszer is [49].)

Amennyiben az optimalizációs feladat egyes paramétereit véletlen mintából becsljük, az ekvivalens statisztikus fizikai problémában véletlen csatolások jelennek meg. Az ilyen jellegű fizikai modellekkel a rendezetlen rendszerek elmélete foglalkozik, amelynek bőséges irodalma van (lásd pl. [50, 51, 52]). Hamar kiderült, hogy a kezdetben csak a spinűvegekre alkalmazott – az ún. replika-módszeren alapuló – elmélet hatékonyan használható számos, a spinűvegeken illetve akár a fizikán is túlmutató területen is (pl. véletlen mátrixok elmélete, mesterséges neuronhálózatok, kombinatorikus optimalizáció). Ebben a fejezetben a [53, 30] tanulmányokhoz hasonlóan a replika-módszert a portfólió optimalizáció zajérzékenységeinek vizsgálatára fogjuk alkalmazni, és levezetjük, hogy a Markowitz-probléma esetén miként függ $\mathbb{E}[q_0^2]$ a feladat paramétereitől. Habár maga az eredmény természetesen nem újdonság, annak replika-módszerrel történő kiszámítása igen tanulságos a további alkalmazások szempontjából, és még nem szerepel az irodalomban.

6.1. A Markowitz-feladat mint statisztikus fizikai modell

A Markowitz-problémával ekvivalens statisztikus fizikai modell felállításához tehát tekintsük az alábbi Hamilton-függvényt:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sigma_{ij} w_i w_j + \sum_{i=1}^N h_i w_i, \quad (6.1)$$

ahol a w_i valós számok írják le a rendszert alkotó N db. „részecske” állapotát, a σ_{ij} mátrix elemei a részecskék közötti csatolási állandók, a h_i -k pedig a w_i változókhoz konjugált inhomogén külső tér erősségét írják le. Világos, hogy a $h_1 = h_2 = \dots = h_N = 0$ esetben a fenti függvény a \mathbf{w} portfólió kockázatának $1/2$ -edét adja meg egy olyan piacon, ahol az értékpapírhozamok kovarianciamátrixa σ_{ij} . Mint látni fogjuk, a h_i konjugált változók segítségével az optimális portfólió-súlyokat határozhatjuk meg.

Tegyük fel, hogy a fenti Hamilton-függvénnyel rendelkező fizikai rendszer Boltzmann-eloszlást követ, továbbá rájuk ki kényszerfeltételként a $\sum_i w_i = 1$ költségvetési korlátot és a várható hozamra vonatkozó $\sum_i \mu_i w_i = \mu$ összefüggést. Ekkor az állapotösszeg az alábbi módon írható:

$$Z = \int_{-\infty}^{\infty} \prod_i dw_i \exp \left(-\frac{1}{2} \beta \sum_{i,j} \sigma_{ij} w_i w_j - \beta \sum_i h_i w_i \right) \delta \left(\sum_i w_i - 1 \right) \delta \left(\sum_i \mu_i w_i - \mu \right), \quad (6.2)$$

ahol bevezettük a β inverz hőmérsékletet, és az i index 1-től N -ig fut. A Dirac- δ függvények Fourier-előállítását bevezetve a következő Gauss-integrált kapjuk:

$$Z = \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} \prod_i dw_i \exp \left(-\frac{1}{2} \beta \sum_{i,j} \sigma_{ij} w_i w_j - \beta \sum_i h_i w_i \right) \times \\ \times \exp \left[-i\lambda \left(\sum_i w_i - 1 \right) - i\eta \left(\sum_i \mu_i w_i - \mu \right) \right]. \quad (6.3)$$

Az integrált kiszámítva az $F = -\beta^{-1} \ln Z$ összefüggés alapján felírhatjuk a probléma szabadenergiáját:

$$F = -\frac{N}{2\beta} \ln \left(\frac{2\pi}{\beta} \right) + \frac{1}{2\beta} \text{Tr} \ln(\sigma) - \frac{1}{2\beta} \ln(AC - B^2) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sigma_{ij}^{-1} h_i h_j + \\ + \frac{1}{AC - B^2} \left[A \left(\sum_{i,j} \sigma_{ij}^{-1} \mu_i h_j + \mu \right)^2 + C \left(\sum_{i,j} \sigma_{ij}^{-1} h_j + 1 \right)^2 - \right. \\ \left. - 2B \left(\sum_{i,j} \sigma_{ij}^{-1} \mu_i h_j + \mu \right) \left(\sum_{i,j} \sigma_{ij}^{-1} h_j + 1 \right) \right], \quad (6.4)$$

ahol a 2.2.2. szakaszhoz hasonlóan az $A = \sum_{i,j} \sigma_{ij}^{-1}$, $B = \sum_{i,j} \sigma_{ij}^{-1} \mu_j$ és $C = \sum_{i,j} \sigma_{ij}^{-1} \mu_i \mu_j$ jelöléseket alkalmaztuk. Az optimális portfólió a w_i portfólió súlyok termikus átlaga nulla hőmérsékleten, zérus külső tér mellett. A súlyok termikus átlagát a szabadenergiából a külső tér szerinti deriválással kapjuk:

$$\left. \frac{\partial F}{\partial h_i} \right|_{h_1=h_2=\dots=h_N=0} = \langle w_i \rangle, \quad (6.5)$$

ami elemi számolások után

$$\langle w_i \rangle = \sum_j \sigma_{ij}^{-1} \left(\frac{A\mu - B}{AC - B^2} \mu_j + \frac{C - B\mu}{AC - B^2} \right). \quad (6.6)$$

A fenti eredményt a (2.13)-(2.15) egyenletekkel összevetve látható, hogy ez éppen az optimális portfóliósúlyok képlete. Figyelemre méltó tény, hogy $\langle w_i \rangle$ nem függ β -tól, így a termikus átlag az optimális súlyokat nemcsak zérus, hanem már véges hőmérsékleten is előállítja. Mint látni fogjuk, a hatékony portfóliók görbéjét azonban csak alacsony hőmérsékleti limeszben kapjuk meg. Ehhez írjuk fel a szabadenergiát külső tér hiányában:

$$F = -\frac{N}{2\beta} \ln \left(\frac{2\pi}{\beta} \right) + \frac{1}{2\beta} \text{Tr} \ln(\sigma) - \frac{1}{2\beta} \ln(AC - B^2) + \frac{1}{2} \frac{1}{AC - B^2} (A\mu^2 - 2B\mu + C). \quad (6.7)$$

A szabadenergia zérus hőmérsékleten megegyezik a Hamilton-függvény minimumával, tehát a kockázat optimális értékét adja adott μ várható hozam mellett:

$$\sigma^*(\mu) = 2 \lim_{\beta \rightarrow \infty} F = \frac{A\mu^2 - 2B\mu + C}{AC - B^2}, \quad (6.8)$$

ami némi átalakítás után éppen megegyezik a (2.16) képlettel.

6.2. A zajérzékenység és a replika-módszer

Amennyiben a hozamok eloszlásának paramétereit mintából becsüljük, a kovariancia mátrix és a várható értékek, illetve velük együtt a Hamilton-függvény és a szabadenergia is mintáról mintára változik. Mivel az optimumtól függő mennyiségek – például a mérési hibát jellemző q_0^2 is – a szabadenergiából származtathatók, azok minták feletti átlagát a szabadenergia minták feletti átlagából számíthatjuk ki. Ehhez persze általában teljesülnie kell az átlagolás és differenciálás felcserélhetőségének, ami ún. replikaszimmetria-sértő modellekben nem magától értetődő. Látni fogjuk azonban, hogy az itt vizsgált modellben nincs szimmetriasértés, így a felcserélhetőség miatt sem kell aggódnunk.

Célunk tehát a szabadenergia, azaz $\ln Z$ minta-átlagának, az ún. „kvencselt” átlagnak (quenched average) a meghatározása. E nemtriviális probléma megoldására szolgál a spinűvek elméletében kidolgozott replika-módszer, amelyet az alábbiakban a Markowitz-probléma tanulmányozására fogunk használni.

6.2.1. Az állapotösszeg becsült kockázat mellett

Tegyük fel tehát, hogy a σ_{ij} kovariancia-mátrixot és a μ_i várható értékeket nem ismerjük, de rendelkezésünkre áll ebből az eloszlásból egy $\{x_{it}\}$ minta, amely T db. megfigyelésből áll. Ebből az eloszlás paramétereit a (4.4) és (4.5) képletek alapján becsüljük, így a \mathbf{w} portfólió mintából becsült kockázata, azaz a probléma célfüggvénye $\mathcal{H} = \frac{1}{T} \sum_t [\sum_i (x_{it} - \frac{1}{T} \sum_s x_{is}) w_i]^2$, ahol az eltérésnégyzetösszeget $T - 1$ helyett az egyszerűség kedvéért T -vel osztottuk. (Mint később látni fogjuk,

ez a közelítés termodinamikai limeszben jelentőségét veszti.) Bevezetve az $u_t = \sum_i w_i(x_{it} - \mu_i)$ jelölést, a becslőt mintából történő portfólió-választási feladat az alábbi alakban írható:

$$\min_{\mathbf{u}, \mathbf{w}} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left(u_t - \frac{1}{T} \sum_{s=1}^T u_s \right)^2, \quad (6.9)$$

$$\sum_{i=1}^N w_i(x_{it} - \mu_i) = u_t, \quad (6.10)$$

$$\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N w_i x_{it} = N\mu, \quad (6.11)$$

$$\sum_{i=1}^N w_i = N. \quad (6.12)$$

Az (6.12) normálás a végeredményt érdemben nem befolyásolja, ugyanakkor termodinamikai limeszben biztosítja, hogy a portfólió súlyok nagyságrendje $O(1)$ maradjon. Képezzük a 6.1. alfejezetben ismertetett módon a fenti optimalizációs problémának megfelelő állapotösszeget:

$$Z \propto \int \prod_t du_t \int \prod_t d\hat{u}_t e^{-\frac{\beta}{2T} \sum_t (u_t - \frac{1}{T} \sum_s u_s)^2} \int \prod_i dw_i e^{i \sum_t \hat{u}_t [u_t - \sum_i w_i(x_{it} - \mu_i)]} \int d\eta e^{-i\eta (\frac{1}{T} \sum_t u_t + \sum_i w_i \mu_i - N\mu)} \int d\lambda e^{-i\lambda (\sum_i w_i - N)}, \quad (6.13)$$

ahol az integrálok $-\infty$ -tól ∞ -ig értendők. Z kifejezéséből továbbá elhagyunk egy lényegtelen konstans faktort (ezért használtunk az = jel helyett \propto -t), és ezt a továbbiakban is meg fogjuk tenni, hiszen ez nem befolyásolja a szabadenergiából származtatott termodinamikai átlagok értékét.

A későbbiekben az $\{x_{it}\}$ véletlen minta felett szeretnénk átlagolni, amelynek együttes valószínűség-sűrűségfüggvénye:

$$f(\{x_{it}\}) = (2\pi)^{-NT/2} (\det \sigma)^{-T/2} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i,j,t} \sigma_{ij}^{-1} (x_{it} - \mu_i)(x_{jt} - \mu_j)}. \quad (6.14)$$

Az általánosság megszorítása nélkül továbbra is feltesszük, hogy σ_{ij} szigorúan pozitív definit. Ezért a levezetés megkönnyítése érdekében az x_{it} változókat kifejezhetjük z_{it} standard normális eloszlású valószínűségi változók függvényeként:

$$x_{it} = \sum_j D_{ij} z_{jt} + \mu_i, \quad (6.15)$$

ahol D_{ij} a σ_{ij} a hozamok valódi kovariancia mátrixának Cholesky-dekomponáltja, azaz definíció szerint $\sigma_{ij} = \sum_k D_{ik} D_{jk}$. A (6.14) formula alapján egyszerű változóhelyettesítéssel belátható, hogy a z_{it} valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvénye valóban

$$f(\{z_{it}\}) = (2\pi)^{-NT/2} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i,t} z_{it}^2}. \quad (6.16)$$

Az állapotösszeg tehát a z_{it} standard normális eloszlású változókkal kifejezve

$$Z \propto \int \prod_t du_t \int \prod_t d\hat{u}_t e^{-\frac{\beta}{2T} \sum_i (u_i - \frac{1}{T} \sum_s u_s)^2} \int \prod_i dv_i e^{i \sum_i \hat{u}_i (u_i - \sum_i v_i z_{it})} \int d\eta e^{-i\eta (\frac{1}{T} \sum_i u_i + \sum_i v_i \theta_i - N\mu)} \int d\lambda e^{-i\lambda (\sum_i v_i d_i - N)}, \quad (6.17)$$

ahol elvégeztük a $v_i = \sum_j w_j D_{ji}$ változócsereit, és bevezettük a $d_i = \sum_j D_{ij}^{-1}$ és $\theta_i = \sum_j D_{ij}^{-1} \mu_j$ jelöléseket.

6.2.2. A replika-trükk

Célunk a szabadenergia-sűrűség minták feletti átlagának kiszámítása a termodinamikai (azaz N/T konstans és $N \rightarrow \infty$) limeszben:

$$\mathbb{E}[f] = - \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N\beta} \mathbb{E}[\ln Z]. \quad (6.18)$$

Mint említettük, $\ln Z$ várható értékének közvetlen meghatározása komoly nehézségekbe ütközik, de az

$$\ln Z = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{Z^n - 1}{n} \quad (6.19)$$

összefüggés segítségével a problémát visszavezethetjük $\mathbb{E}[Z^n]$ kiszámítására. Ha n -t egész számnak tekintjük, akkor Z^n n db. azonos, független – replikáknak is nevezett – fizikai rendszer állapotösszege lesz, amely (6.17) alapján az alábbi alakban írható:

$$Z^n \propto \int \prod_{a,t} du_t^a \int \prod_{a,t} d\hat{u}_t^a e^{-\frac{\beta}{2T} \sum_{a,t} (u_t^a - \frac{1}{T} \sum_s u_s^a)^2} \int \prod_{a,i} dv_i^a e^{i \sum_{a,t} \hat{u}_t^a (u_t^a - \sum_i v_i^a z_{it})} \int \prod_a d\eta^a e^{-i \sum_a \eta^a (\frac{1}{T} \sum_i u_i^a + \sum_i v_i^a \theta_i - N\mu)} \int \prod_a d\lambda^a e^{-i \sum_a \lambda^a (\sum_i v_i^a d_i - N)}, \quad (6.20)$$

Az a ún. replikaindexek 1-től n -ig futnak. Mint látni fogjuk, ezen a kifejezésen már könnyen elvégezhető a z_{it} -k feletti átlagolás. Ezt követően arra fogunk törekedni, hogy az integrálok elvégzése után a replika-állapotösszeget az $\mathbb{E}[Z^n] \propto \exp(-\beta N g(\beta, N/T, N) + O(n^2))$ alakra hozzuk. Ezt a kifejezést a (6.19) egyenletbe helyettesítve, és az n számot valósként újraértelmezve már elvégezhetjük az $n \rightarrow 0$ határártmenetet. Ennek eredményeként azt kapjuk, hogy a kitevőben szereplő g függvény a termodinamikai határesetben egy lényegtelen additív konstans erejéig megegyezik a szabadenergia-sűrűség átlagával, vagyis $\mathbb{E}[f(\beta, r)] = \text{const} + \lim_{N \rightarrow \infty} g(\beta, r, N)$, ahol az $r = N/T$ jelölést alkalmaztuk.

Hangsúlyoznunk kell azt a tényt, hogy a pozitív egész n -ek diszkrét halmazáról a valós n -ekre történő analitikus folytatás további megszorítások nélkül nem szükségképpen egyértelmű – az ebben rejlő bizonytalanság miatt emlegetik ezt az eljárást „replika-módszer” helyett „replika-trükk” néven. Mindazonáltal a módszer igen hatékony, és általában helyes eredményre vezet. Heurisztikus volta miatt azonban a replika-módszeren alapuló számításokat más módokon (pl. empirikus vagy

numerikus úton) is alá kell támasztani.

6.2.3. A minták feletti átlag

Átlagoljuk tehát a (6.20) replika-állapotösszeget a (6.16) sűrűségfüggvény szerint. Ehhez az alábbi integrált kell kiszámítanunk:

$$(2\pi)^{-NT/2} \int \prod_{i,t} dz_{it} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i,t} z_{it}^2 - i \sum_{a,i,t} \hat{u}_i^a v_i^a z_{it}} = e^{-\frac{1}{2} \sum_{it} (\sum_a v_i^a \hat{u}_i^a)^2}. \quad (6.21)$$

Vezessük be a replika- vagy átfedési mátrixot a következőképpen:

$$Q^{ab} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v_i^a v_i^b, \quad (6.22)$$

és alakítsuk át (6.21)-t a következőképpen:

$$e^{-\frac{1}{2N} \sum_{it} (\sum_a v_i^a \hat{u}_i^a)^2} \propto \int \prod_{ab} dQ^{ab} \int \prod_{ab} d\tilde{Q}^{ab} e^{\frac{i}{2} N \sum_{a,b} \tilde{Q}^{ab} (Q^{ab} - \frac{1}{N} \sum_i v_i^a v_i^b) - \frac{N}{2} \sum_{ab} Q^{ab} \sum_i \hat{u}_i^a \hat{u}_i^b}. \quad (6.23)$$

Ezt visszahelyettesítve (6.20)-ba és némileg átrendezve kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Z^n] &\propto \int \prod_{ab} dQ^{ab} \int \prod_{ab} d\tilde{Q}^{ab} e^{\frac{i}{2} N \sum_{a,b} \tilde{Q}^{ab} Q^{ab}} \int \prod_{a,t} du_t^a e^{-\frac{\beta}{2T} \sum_{a,t} (u_t^a - \frac{1}{T} \sum_s u_s^a)^2} \\ &\int \prod_{a,t} d\hat{u}_t^a e^{-\frac{N}{2} \sum_{a,b} Q^{ab} \sum_i \hat{u}_i^a \hat{u}_i^b + i \sum_{a,t} \hat{u}_i^a u_t^a} \int \prod_a d\eta^a \int \prod_a d\lambda^a e^{i \sum_a \eta^a (N\mu - \frac{1}{T} \sum_t u_t^a) + i N \sum_a \lambda^a} \\ &\int \prod_{a,i} dv_i^a e^{-\frac{1}{2} \sum_{a,b} \tilde{Q}^{ab} \sum_i v_i^a v_i^b - i \sum_{a,i} (\eta^a \theta_i + \lambda^a d_i) v_i^a}, \quad (6.24) \end{aligned}$$

ahol a $\tilde{Q}^{ab} = iQ^{ab}$ helyettesítést alkalmaztunk, és ennek megfelelően a \tilde{Q}^{ab} változók szerinti integrálás a képzetes tengely mentén, $-i\infty$ és $i\infty$ között értendő. Az \hat{u}_i^a , v_i^a , η^a és λ^a szerinti Gauss-integrálok ezután mechanikusan kiszámíthatók. Egyedül arra kell odafigyelnünk, hogy mivel \tilde{Q}^{ab} képzetes, ezért némelyik Gauss integrálban a szórás paraméter szintén képzetes lesz. Ez azonban nem okoz problémát, mert a \tilde{Q}^{ab} szerinti integrál kontúrját megváltoztathatjuk úgy, hogy a képzetes tengelytől jobbra fusson és csak $\pm i\infty$ -ben „simuljon” bele a képzetes tengelybe. Így \tilde{Q}^{ab} véges értékeire $\text{Re}(\tilde{Q}^{ab}) > 0$ és az összes Gauss-integrál értelmes lesz. A következő eredményre jutunk:

$$\mathbb{E}[Z^n] \propto \int \prod_{ab} dQ^{ab} \int \prod_{ab} d\tilde{Q}^{ab} e^{-N[G(\mathbf{Q}, \tilde{\mathbf{Q}}; \beta) + O(1/N)]}, \quad (6.25)$$

ahol

$$G(\mathbf{Q}, \hat{\mathbf{Q}}; \beta) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{2} \sum_{a,b} \hat{Q}^{ab} (Q^{ab} - N\sigma^{*2}(\mu)) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2r} \text{Tr} \ln \mathbf{Q} + \frac{1}{2} \text{Tr} \ln \hat{\mathbf{Q}} - \frac{1}{N} \ln A(\mathbf{Q}, \hat{\mathbf{Q}}; \beta) \right], \quad (6.26)$$

$$A(\mathbf{Q}, \hat{\mathbf{Q}}; \beta) = \int \prod_{a,t} du_a^t e^{-\frac{\beta}{2T} \sum_{a,t} (u_a^t - \frac{1}{T} \sum_s u_s^a)^2 - \frac{1}{2N} \sum_{a,b} [\mathbf{Q}^{-1}]^{ab} \sum_t u_a^t u_b^t} \\ e^{-\frac{1}{2} \sum_{a,b} \hat{Q}^{ab} \left[\frac{\alpha^*}{T^2} \sum_{t,s} u_a^t u_s^b - \frac{N\eta^*(\mu)}{T} \sum_t (u_t^a + u_t^b) \right]}. \quad (6.27)$$

és az $N \rightarrow \infty$ limeszt $r = N/T = \text{const}$ mellett értjük, $\eta^*(\mu)$ -t (2.15), $\sigma^*(\mu)$ -t pedig (2.16) definiálja, továbbá a 2.2.2. alfejezet jelöléseivel $\alpha^* = A/(AC - B^2)$. Emlékeztetdül: $N\sigma^*(\mu)$ nem más, mint az igazi (teljes információ alapján számított) optimális portfólió kockázata (az N szorzóra a módosított költségvetési korlát miatt van szükség). A továbbiakban feltesszük, hogy $\sigma^{*2}(\mu)$, $\eta^*(\mu)$ és α^* nagyságrendje $O(1/N)$. (Ez például $\sigma_{ij} = \delta_{ij}$ és $\mu_i = \text{const}$ esetén automatikusan teljesül.) Belátható, hogy ez pusztán technikai követelmény, amely eredményeink általánosságát nem befolyásolja.

Mivel $A(\mathbf{Q}, \hat{\mathbf{Q}}; \beta)$ -t elég termodinamikai limeszben meghatározunk, az $O(N)$ -nél kisebb nagyságrendű tagokat elhanyagolva kapjuk, hogy:

$$A(\mathbf{Q}, \hat{\mathbf{Q}}; \beta) = \int \prod_{a,t} du_a^t e^{-\frac{1}{2N} \sum_{a,b,t,s} \left[(\beta r + [\mathbf{Q}^{-1}]^{ab}) \delta_{ts} + \frac{\alpha^2}{N} (\alpha^* \hat{Q}^{ab} - \beta \delta^{ab}) \right] u_a^t u_s^b + \eta^*(\mu) r \sum_{a,b,t} \hat{Q}^{ab} u_a^t} \propto \\ \propto e^{-\frac{N}{2r} [\text{Tr} \ln(\beta r \mathbf{I} + \mathbf{Q}^{-1}) + O(1/N)]}, \quad (6.28)$$

ahol \mathbf{I} az $n \times n$ -es identitásmátrix. Ezt az eredményt visszahelyettesítve (6.26)-ba:

$$G(\mathbf{Q}, \hat{\mathbf{Q}}; \beta) = \frac{1}{2} \left[-\sum_{a,b} \hat{Q}^{ab} (Q^{ab} - \nu(\mu)) + \text{Tr} \ln \hat{\mathbf{Q}} + \frac{1}{r} \text{Tr} \ln (\beta r \mathbf{Q} + \mathbf{I}) \right], \quad (6.29)$$

ahol $\nu(\mu) = \lim_{N \rightarrow \infty} N\sigma^{*2}(\mu)$.

6.2.4. Az átfedési mátrix „fizikai” jelentése

Mielőtt folytatnánk a számítást, vizsgáljuk meg közelebbről, hogyan interpretálhatók a \mathbf{Q} replika-mátrix elemei. Tekintsünk két replikát amelyek indexe a és b . Jelölje a két rendszer konfigurációját a \mathbf{v}^a és \mathbf{v}^b vektor. Ekkor a $v_i^a = \sum_j w_j^a D_{ji}$ összefüggés alapján az a és b replikák közötti átfedés a

portfólió súlyokkal kifejezve

$$Q^{ab} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v_i^a v_i^b = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sigma_{ij} w_i^a w_j^b. \quad (6.30)$$

NQ^{ab} tehát nem más, mint a \mathbf{w}^a és \mathbf{w}^b portfóliók valódi (teljes információ alapján számított) kovarianciája. Speciálisan, NQ^{aa} a \mathbf{w}^a portfólió valódi varianciája, azaz kockázata lesz.

Mivel a replika-módszer alkalmazása során a portfólió súlyokat $\sum_i w_i = 1$ helyett $\sum_i w_i = N$ módon normáltuk, a valódi optimum szórása $\sigma^*(\mu)$ helyett $N\sigma^*(\mu)$ lesz. Ezt szem előtt tartva a \mathbf{w}^a portfólió q_0 becslési hibája Q^{aa} igen egyszerű függvénye lesz:

$$q_0^2(\mathbf{w}^a) = \frac{Q^{aa}}{N\sigma^{*2}(\mu)}. \quad (6.31)$$

A becslt optimum várható hibája tehát megegyezik a fenti kifejezés értékével termodinamikai limeszben, zérus hőmérsékleten. Mivel az energiafelület szigorúan konvex, azt várjuk, hogy alacsony hőmérsékleten minden replika ugyanahhoz a minimumhoz tart, tehát Q^{aa} értéke független lesz a replikaindexek megválasztásától (ezt a következő alfejezetben be is látjuk). Ennek megfelelően azt kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}[q_0^2] = \frac{1}{\nu(\mu)} \lim_{\beta \rightarrow \infty} \lim_{N \rightarrow \infty} Q^{aa} \quad (6.32)$$

a -tól függetlenül. Q^{aa} egyensúlyi értékének kiszámítását a következő szakaszban végezzük el.

6.2.5. A nyeregpont módszer

Mivel a (6.25) integrált az $N \rightarrow \infty$ limeszben szeretnénk kiszámítani, alkalmazhatjuk a nyeregpont közelítést:

$$\int \prod_{ab} dQ^{ab} \int \prod_{ab} d\hat{Q}^{ab} e^{-N[G(\mathbf{Q}, \hat{\mathbf{Q}}; \beta) + O(1/N)]} \sim e^{-N \min_{\mathbf{Q}, \hat{\mathbf{Q}}} G(\mathbf{Q}, \hat{\mathbf{Q}}; \beta)}, \quad (6.33)$$

ami termodinamikai határesetben egzakttá válik. A nyeregpont-feltételek tehát:

$$2 \frac{\partial G_\beta}{\partial Q^{ab}} = -\hat{Q}^{ab} + \beta \left[(r\beta \mathbf{Q} + \mathbf{I})^{-1} \right]^{ba} = 0, \quad (6.34)$$

$$2 \frac{\partial G_\beta}{\partial \hat{Q}^{ab}} = -Q^{ab} + \nu(\mu) + \left[\hat{\mathbf{Q}}^{-1} \right]^{ba} = 0. \quad (6.35)$$

Az egyenletek megoldása nem okoz nehézséget és a következő eredményre jutunk:

$$Q_{sp}^{ab} = \frac{1}{1-r} \left[\nu(\mu) + \beta^{-1} \delta^{ab} \right], \quad (6.36)$$

$$\hat{Q}_{sp}^{ab} = \beta(1-r) \left[\frac{\beta r \nu(\mu)}{\beta r \nu(\mu) + 1} + \delta^{ab} \right], \quad (6.37)$$

ahol az sp az alsó indexben a nyeregpontra (saddle-point) utal. Azt látjuk tehát, hogy a nyeregpontban az átfedési mátrix és konjugáltja invariáns a replikák permutációjára, csak az számít, hogy

ugyanarról vagy különböző replikákról van-e szó, más szóval a nyeregpont replika-szimmetrikus. Mint az előző szakaszban utaltunk rá, ez annak a következménye, hogy – függetlenül az adott mintától – a rendszer Hamilton-függvénye az adott kényszerfeltételek mellett pontosan egy alapállapotot határoz meg, feltéve hogy $r < 1$, azaz a minta mérete elegendően nagy.

Látható továbbá, hogy \mathbf{Q}_{sp} diagonális és nemdiagonális elemei közötti különbség β^{-1} -nel arányos, tehát zérus hőmérsékleten eltűnik, ami annak a következménye hogy az összes replika ugyanabba az egyensúlyi állapotba áll be, így az azonos és különböző replikák átfedése közti eltérés megszűnik.

Ezen a ponton a (6.32) egyenlet alapján explicite meghatározhatjuk $\mathbb{E}[q_0^2]$ -t:

$$\mathbb{E}[q_0^2] = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{1-r} \left(1 + \frac{1}{\beta\nu(\mu)} \right) = \frac{1}{1-r}. \quad (6.38)$$

Ez az eredmény összesség [16] numerikus és [17] analitikus eredményeivel, ahol a szerzők a Markowitz-probléma speciális esetét vizsgálták (a globális minimum zajérzékenységet, korrelálatlan, zérus várható értékű hozamok esetén). A (6.38) formula legmeglepőbb vonása, hogy az átlagos becslési hibát (nagy portfóliók esetén) csak az N/T arány befolyásolja, és teljesen független mind az eloszlás σ_{ij} és μ_i paramétereitől, mind pedig a μ elvárt hozamtól.

A szabadenergia-sűrűség meghatározásához helyettesítsük be (6.34)-t és (6.35)-t (6.29)-be. Felhasználva a tényt, hogy $Q^{ab} = q + \Delta q^{ab}$ esetén $\text{Tr} \ln \mathbf{Q} = n(q/\Delta q + \ln \Delta q) + O(n^2)$, némi számolás után kapjuk, hogy

$$G(\mathbf{Q}_{sp}, \hat{\mathbf{Q}}_{sp}; \beta) = \frac{1}{2} n \beta \nu(\mu) (1-r) + O(n^2). \quad (6.39)$$

A 6.2.2. alfejezet alapján tehát a szabadenergia-sűrűség az alábbi módon írható

$$\mathbb{E}[f(\beta, r)] = \frac{f_0}{\beta} + \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n\beta} G(\mathbf{Q}_{sp}, \hat{\mathbf{Q}}_{sp}; \beta) = \frac{f_0}{\beta} + \frac{1}{2} \nu(\mu) (1-r), \quad (6.40)$$

ahol az f_0 additív tag a $\mathbb{E}[Z^n]$ -ben szereplő, integrálásokból származó szorzófaktorból ered. Az integrálokat végignéve belátható, hogy f_0 nem függ β -tól, illetve az $n \rightarrow 0$ és $N \rightarrow \infty$ limeszek miatt n -től, illetve N -től és T -től sem (legfeljebb r -től). A szabadenergia zérus hőmérsékleten megadja a Hamilton-függvény értékét alapállapotban, így nagy N esetén a minta alapján számított optimumban a becslőt kockázat minták feletti átlaga:

$$\mathbb{E}[\sigma^{*2}(\mu)] = 2N \lim_{\beta \rightarrow \infty} \mathbb{E}[f(\beta, r)] = N^2 \sigma^{*2}(\mu) (1-r). \quad (6.41)$$

Az alfejezetet egy fontos megjegyzéssel zárjuk. Az a tény, hogy (6.29) szélsőértékét explicite meg tudtuk határozni, valójában igen nagy szerencse volt, és bonyolultabb esetekben (amilyenel a későbbiekben mi is találkozni fogunk), ez nem tehető meg. Ilyenkor a szokásos eljárás az, hogy a replika-szimmetriát előre feltételezzük, és a $G(\mathbf{Q}, \hat{\mathbf{Q}}; \beta)$ függvényt kifejezzük \mathbf{Q} és $\hat{\mathbf{Q}}$ diagonális és nemdiagonális elemeinek függvényeként, majd ezek felett minimalizálunk. Mivel azonban a valódi nyeregpont nem feltétlenül replika-szimmetrikus, meg kell vizsgálnunk a replika-szimmetrikus ansatzból számolt szélsőérték stabilitását. Bizonyos rendszerekben (példá-

ul spinűvegekben) azt találjuk, hogy a replika-szimmetria egy (nullánál magasabb) kritikus hőmérsékleten megszűnik, és az alatt a nyeregpont nem szimmetrikus. A replikaszimmetria-sértő fázisban az átfedések eloszlását és a szabadenergiát elsőként Parisi határozta meg [54] az ún. Sherrington-Kirkpatrick-modellel [55]. Mint láttuk, a mi modellünk ennél jóval egyszerűbb, és a replika-szimmetrikus nyeregpont stabilitását viszonylag könnyen ellenőrizhetjük – ez a tárgya következő alfejezetnek.

6.2.6. A replika-szimmetrikus nyeregpont stabilitása

A nyeregpont akkor stabil, ha \mathbf{Q}_{sp} -ben $G(\mathbf{Q}, \hat{\mathbf{Q}}; \beta)$ valóban minimális. Mivel a konjugált változó komplex és az eredetileg a képzetes tengely mentén futó integrálási kontúrja alakítható, ezért $\hat{\mathbf{Q}}_{sp}$ -ban nem számít, hogy a $\hat{\mathbf{Q}}$ szerinti szélsőérték minimum vagy maximum. Ezért elég a $G(\mathbf{Q}; \beta) = G(\mathbf{Q}, \hat{\mathbf{Q}}_{sp}; \beta)$ függvény \mathbf{Q}_{sp} -beli stabilitását vizsgálni. (6.35)-ből $\hat{\mathbf{Q}}$ -t kifejezve és (6.29)-be helyettesítve kapjuk, hogy

$$G(\mathbf{Q}; \beta) = \frac{1}{2} \left[-n - \text{Tr} \ln (\mathbf{Q} - \nu(\mu)\mathbf{U}) + \frac{1}{r} \text{Tr} \ln (\beta r \mathbf{Q} + \mathbf{I}) \right], \quad (6.42)$$

ahol \mathbf{U} jelöli azt az $n \times n$ -es mátrixot, amelynek minden eleme 1. Számítsuk ki $G(\mathbf{Q}; \beta)$ Hess-mátrixát (az egyszerűség kedvéért beleértve egy 2-es szorzót is):

$$\begin{aligned} H^{ab,cd} = 2 \frac{\partial^2}{\partial Q^{ab} \partial Q^{cd}} G(\mathbf{Q}; \beta) &= \left[(\mathbf{Q} - \nu(\mu)\mathbf{U})^{-1} \right]^{ac} \left[(\mathbf{Q} - \nu(\mu)\mathbf{U})^{-1} \right]^{bd} - \\ &\quad - r\beta^2 \left[(\beta r \mathbf{Q} + \mathbf{I})^{-1} \right]^{ac} \left[(\beta r \mathbf{Q} + \mathbf{I})^{-1} \right]^{bd}. \end{aligned} \quad (6.43)$$

Ebbe a kifejezésbe \mathbf{Q}_{sp} -t behelyettesítve azt kapjuk, hogy $H_{sp}^{ab,cd} = R^{ac} R^{bd}$, ahol

$$R^{ab} = \rho + \Delta \rho \delta^{ab} = \beta(1-r)^{3/2} \left(-\frac{\beta r \nu(\mu)}{\beta r \nu(\mu)n + 1} + \delta^{ab} \right). \quad (6.44)$$

A nyeregpont tehát akkor stabil, ha $H_{sp}^{ab,cd}$ szigorúan pozitív definit. Ennek ellenőrzéséhez oldjuk meg a

$$\sum_{c=1}^n \sum_{d=1}^n H_{sp}^{ab,cd} S_m^{cd} = \lambda_m S_m^{ab}. \quad (6.45)$$

sajátérték-problémát, ahol a λ_m sajátértékek és az S_m^{ab} sajátvektorok száma n^2 , és vizsgáljuk meg, hogy a sajátértékek pozitívak-e. R^{ab} szimmetriája miatt $H_{sp}^{ab,cd}$ szintén szimmetrikus, tehát $H_{sp}^{ab,cd} = H_{sp}^{cd,ab}$, így az S_m^{ab} sajátvektorok közül kiválasztható egy ortonormált bázis. Ezen kívül a Hess-mátrix egy további fontos szimmetriával is rendelkezik, nevezetesen $H_{sp}^{ab,cd} = H_{sp}^{ba,dc}$. Ennek közvetlen következménye, hogy amennyiben S^{ab} sajátvektor, annak S^{ba} transzponáltja, $(S^{ab} + S^{ba})/2$ szimmetrikus része és $(S^{ab} - S^{ba})/2$ antiszimmetrikus része szintén sajátvektor (ugyanazzal a sajátértékkel). A szimmetrikus mátrixok $n(n+1)/2$ dimenziós tere, illetve az an-

tiszszimmetrikus mátrixok $n(n-1)/2$ dimenziós tere tehát a Hess-mátrix invariáns alterei lesznek. Elemi megfontolások alapján kikövetkeztethető (és utólag ellenőrizhető) hogy $H_{sp}^{ab,cd}$ az alábbi invariáns alterekkel rendelkezik:

Altér	Sajátérték	Sajátvektorok	Multiplicitás
I	$\lambda = (\rho n + \Delta\rho)^2$	$S^{ab} = 1$ minden a -ra és b -re	1
II	$\lambda = (\rho n + \Delta\rho)\Delta\rho$	$S^{ab} = \begin{cases} 1-n & \text{ha } a=b=k, \\ \frac{2-n}{2} & \text{ha vagy } a=k, \text{ vagy } b=k, \\ 1 & \text{ha } a \neq k \text{ és } b \neq k. \end{cases}$ $k = 1, 2, \dots, n-1$	$n-1$
III	$\lambda = \Delta\rho^2$	Azok a szimmetrikus mátrixok, amelyek invariánsan hagyják az $(1, 1, 1, \dots, 1)$ vektort.	$\frac{1}{2}n(n-1)$
IV	$\lambda = (\rho n + \Delta\rho)\Delta\rho$	$S^{ab} = \delta^{ak} - \delta^{bk}$ $k = 1, 2, \dots, n-1$	$n-1$
V	$\lambda = \Delta\rho^2$	Azok az S^{ab} mátrixok, melyekre tetszőleges a mellett $\sum_{b=1}^n S^{ab} = 0$.	$\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$

Az I., II. és III. altérbe szimmetrikus mátrixok tartoznak, és a multiplicitások összeadásával ellenőrizhető, hogy az I-III alterek kifeszítik az $n \times n$ -es szimmetrikus mátrixok teljes $n(n+1)/2$ dimenziós lineáris terét. Hasonlóan belátható, hogy a IV. és V. invariáns altér kifeszíti az antiszimmetrikus mátrixok teljes $n(n-1)/2$ dimenziós terét. A multiplicitások összege éppen n^2 , így az összes sajátértéket és sajátvektort megtaláltuk.

A $H_{sp}^{ab,cd}$ Hess-mátrixnak tehát összesen három sajátértéke van:

$$\lambda_1 = (\rho n + \Delta\rho)^2 = \frac{\beta^2(1-r)^3}{(\beta r \nu(\mu)n + 1)^2}, \quad (6.46)$$

$$\lambda_2 = (\rho n + \Delta\rho)\Delta\rho = \frac{\beta^2(1-r)^3}{\beta r \nu(\mu)n + 1}, \quad (6.47)$$

$$\lambda_3 = \Delta\rho^2 = \beta^2(1-r)^3. \quad (6.48)$$

Ezek közül λ_1 nem degenerált, λ_2 $2(n-1)$ -szeresen degenerált, míg λ_3 $(n-1)^2$ -szeresen degenerált. A sajátértékek pontosan akkor pozitívak, ha $r < 1$. A replika-szimmetrikus nyeregpont valóban stabil tetszőleges hőmérsékleten, feltéve hogy $r < 1$ azaz $T > N$. Ezzel tehát megadtuk a Markowitz-feladat zajérzékenységeinek jellemzését termodinamikai limesben.

7. fejezet

Veszteségoldali kockázati mértékek parametrikus becslése

A 4.2.2. szakaszban láttuk, hogy az ES historikus becslés alapján történő minimalizációja nagyfokú zajérzékenységet mutat, hiszen véges számú értékpapír (N) és véges hosszúságú (T) minta mellett pozitív annak a valószínűsége, hogy nem létezik optimum. Abban a határesetben, amikor mind N -nel, mind T -vel tartunk a végtelenbe úgy, hogy az $r = N/T$ hányados állandó, a 4.3. ábrának megfelelően az optimum létezésének valószínűsége az α konfidenciaszint és a T/N relatív mintaméret függvényében vagy 1-hez vagy 0-hoz tart.

A tisztán historikus adatokra támaszkodó becslési módszerek azonban köztudottan instabilak, így érdemes megvizsgálni, hogy valamilyen paraméteres modell illesztésével csökkenthető-e az instabilitás, és ha igen, milyen mértékben. Ezt a kérdést vizsgáljuk meg ebben a fejezetben az [56] dolgozatunk alapján a replika-módszer és Monte-Carlo szimulációk segítségével.

7.1. A VaR és az ES paraméteres alakja

Veszteségoldali kockázati mértékeken egyelőre olyan mértékeket értünk, amelyek a kockázatot a veszteségekkel hozzák összefüggésbe. Ilyen többek között a várható veszteség (ES), a kockáztatott érték (VaR) és a szemivariancia. A 3. fejezetben láttuk, hogy folytonos eloszlásfüggvénnyel rendelkező valószínűségi változók esetén a VaR és az ES az eloszlásfüggvény ismeretében igen hasonló módon becsülhető, és mint látni fogjuk, ugyanez igaz a szemivarianciára is.

Tegyük fel ismét, hogy az árfolyammozgások Gauss-eloszlásúak, és jelölje X valamely értékpapír hozamát μ várható értékkel és σ szórással. Ekkor tehát (3.6) és (3.16) alapján mind a VaR, mind pedig az ES az

$$\mathcal{R}(X) = \phi(\alpha)\sigma - \mu \quad (7.1)$$

alakban írható, ahol $\phi(\alpha)$ konkrét alakja attól függ, hogy $\mathcal{R}(X)$ alatt éppen a kockáztatott értéket

vagy a várható veszteséget értjük-e:

$$\phi(\alpha) = \begin{cases} \Phi^{-1}(\alpha) & \text{a VaR,} \\ \frac{e^{-\frac{1}{2}[\Phi^{-1}(\alpha)]^2}}{(1-\alpha)\sqrt{2\pi}} & \text{az ES esetében.} \end{cases} \quad (7.2)$$

A továbbiakban $\phi(\alpha)$ -ról elég feltennünk, hogy nemnegatív és invertálható, és az α -függés jelölésétől általában eltekintünk, hiszen minden számunkra releváns mennyiség csak $\phi(\alpha)$ -n keresztül függ α -tól. Könnyen belátható továbbá, hogy a (3.3) képlettel definiált szemivariancia is (7.1) alakba írható $\phi = 1$ mellett¹, hiszen normális eloszlású (tehát szimmetrikus) X esetén $\nu(X) = \sigma(X)$.

Tekintsük most a \mathbf{w} portfóliót egy N értékpapírból álló piacon, ahol a hozamok kovariancia mátrixa σ_{ij} és várható értékeinek vektora $\boldsymbol{\mu}$. (7.1) alapján a portfólió kockázata ekkor

$$\mathcal{R}_\phi(\mathbf{w}) = \phi \sqrt{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sigma_{ij} w_i w_j} - \sum_{i=1}^N \mu_i w_i \quad (7.3)$$

lesz. Ennek a minimumát fogjuk meghatározni a következő szakaszban.

7.2. Az optimális portfólió

Az egyszerűség kedvéért a várható hozamra egyelőre nem rovunk ki mellékfeltételt, és az $\mathcal{R}_\phi(\{w_i\})$ kockázat minimumát a $\sum_i w_i$ költségvetési korlát mellett keressük. Az így kapott megoldást a továbbiakban a kockázat globális minimumának fogjuk nevezni. (A fejezet végén eredményeinket a várható hozam melletti optimalizációs feladatra is általánosítjuk.) A portfólióválasztási feladat így ekvivalens lesz a

$$\min_{\mathbf{w}, y} \left(\phi \sqrt{y} - \sum_i w_i \mu_i \right), \quad (7.4)$$

$$\sum_{i=1}^N w_i = 1, \quad (7.5)$$

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sigma_{ij} w_i w_j = y \quad (7.6)$$

problémával, amely a λ és ξ Lagrange-multiplikátorokat bevezetve az alábbi Lagrange-függvényre vezet:

$$\mathcal{L}(\mathbf{w}, y, \lambda, \xi) = \phi \sqrt{y} - \sum_i w_i \mu_i + \lambda \left(\sum_i w_i - 1 \right) + \frac{\xi}{2} \left(\sum_{ij} w_i \sigma_{ij} w_j - y \right). \quad (7.7)$$

Tegyük fel, hogy a σ_{ij} mátrix szigorúan pozitív definit. A fenti függvény parciális deriváltjait nullává téve a kapott egyenletrendszer megoldása során egyrészt kiderül, hogy $\xi > 0$, másrészt λ -ban egy másodfokú egyenletre jutunk, amelynek csak akkor van valós gyöke, ha $\psi(\phi) = B^2 -$

¹Ez a formula a fejezet alapjául szolgáló [56] publikációkban tévesen $\phi = 1/\sqrt{2}$ -ként szerepel.

$AC + A\phi^2 \geq 0$, ahol ismét a szokásos $A = \sum_{ij} \sigma_{ij}^{-1}$, $B = \sum_{ij} \sigma_{ij}^{-1} \mu_j$ és $C = \sum_{ij} \sigma_{ij}^{-1} \mu_i \mu_j$ jelöléseket alkalmaztuk. Amennyiben ezek a feltételek teljesülnek, az egyenletrendszernek egyetlen megoldása lesz, nevezetesen

$$w_i^* = \frac{1}{\xi^*} \sum_j \sigma_{ij}^{-1} (\mu_j - \lambda^*), \quad (7.8)$$

$$\lambda^* = \frac{B - \sqrt{\psi(\phi)}}{A}, \quad (7.9)$$

$$\xi^* = \sqrt{\psi(\phi)}. \quad (7.10)$$

Mivel $\xi > 0$, ezért (7.10) miatt $\psi(\phi)$ sem lehet nulla. Összefoglalva tehát az optimalizációs problémának akkor van megoldása, ha

$$\psi(\phi) = B^2 - AC + A\phi^2 > 0, \quad (7.11)$$

és ez a megoldás egyértelmű. Ekkor az optimális portfólió kockázata:

$$\mathcal{R}_\phi^* = \frac{\sqrt{\psi(\phi)} - B}{A}. \quad (7.12)$$

Látható, hogy a szórás minimalizációjával ellentétben az optimum létezéséhez nem elegendő, hogy a kovariancia mátrix invertálható legyen. A kovariancia mátrix és a várható érték mintából történő becslése esetén tehát előfordulhat, hogy a rendelkezésünkre álló minta olyan becslült paraméterértékekre vezet, amelyek mellett annak ellenére sincs optimum, hogy a valódi kovarianciamátrix szerint az létezik. A fejezet hátralevő részében azt vizsgáljuk, hogy ez milyen esetekben történhet meg.

7.3. Az optimalizáció zajérzékenysége

7.3.1. A mérési hiba jellemzése

Tegyük fel, hogy a hozamok valódi kovarianciái és várható értékei teljesítik az (7.11) feltételt, így létezik optimális portfólió. Képzeljük magunkat ismét a hiányos információval rendelkező befektető helyébe. Ez a befektető feltevésünk szerint tudja, hogy a hozamok normális eloszlásúak, de az eloszlás paramétereit (σ_{ij} , μ_i) nem ismeri. Rendelkezésre áll azonban egy T hosszúságú idősor, amelyből (4.4) és (4.5) alapján megbecsüli a hiányzó paramétereket ($\hat{\sigma}_{ij}$, $\hat{\mu}_i$). A becslült kockázat tehát

$$\hat{\mathcal{R}}_\phi(\mathbf{w}) = \phi \sqrt{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \hat{\sigma}_{ij} w_i w_j - \sum_{i=1}^N \hat{\mu}_i w_i}. \quad (7.13)$$

$\hat{\mathcal{R}}_\phi(\mathbf{w})$ értéke természetesen mintáról mintára fluktuál, így megeshet, hogy az egyik mintán (7.11) teljesül, míg egy másikon nem, annak ellenére, hogy a valódi optimum létezik. Ismét a replika-módszert fogjuk alkalmazni annak vizsgálatára, hogy paraméteres becslés esetén, termodinamikai

limeszben (azaz nagy portfóliókra)

- mi az optimum létezésének feltétele, és
- ha létezik az optimum, mekkora a q_0 becslési hiba.

Az $\mathcal{R}_\phi(\mathbf{w})$ valódi kockázat minimumát jelölje \mathbf{w}^* . Egy $\{x_{it}\}$ véges minta mellett azonban a becslült $\mathcal{R}_\phi(\mathbf{w})$ kockázat $\hat{\mathbf{w}}^*$ optimuma – ha egyáltalán létezik – 1 valószínűséggel eltér \mathbf{w} -től, és az eltérés mértékét (4.6) általánosításaként az alábbi módon definiálhatjuk:

$$q_0 = \frac{\mathcal{R}_\phi(\hat{\mathbf{w}}^*)}{\mathcal{R}_\phi(\mathbf{w}^*)}, \quad (7.14)$$

ahol a nevező konkrét alakját (7.12) adja meg, a számlálót pedig (7.13).

A fejezet első szakaszában láttuk, hogy a $\hat{\mathbf{w}}^*$ optimum, és ezzel együtt q_0 nem minden mintára létezik, így az $\mathbb{E}[q_0^2]$ minta-átlag sem számítható ki. Ehelyett a $\tilde{\mathbb{E}}[q_0^2] = \mathbb{E}[q_0^2 | \{x_{it}\} \in \Omega_{N,T,\phi}]$ feltételes várható értéket fogjuk vizsgálni, ahol $\Omega_{N,T,\phi}$ jelöli azoknak a T hosszúságú, megfigyelésenként N adatot tartalmazó $\{x_{it}\}$ mintáknak a halmazát, amelyen \mathcal{R}_ϕ -nek létezik minimuma.

Látható, hogy a $\sigma_{ij} = \delta_{ij}$, $\mu_i = 0$ esetben a paraméteres VaR, illetve ES mérési hibáját ugyanaz a képlet adja meg, mint a szórását. Alkalmazzuk tehát a replika-módszert a 6. fejezetben bemutatott módon az (7.4)-(7.6) optimalizációs problémára, és vezessük le termodinamikai limeszben az optimum létezésének feltételét, illetve az $\tilde{\mathbb{E}}[q_0^2]$ átlagot.

7.3.2. A szabadenergia-sűrűség meghatározása

Vezessük vissza ismét az x_{it} hozamokat a z_{it} standard normális eloszlású valószínűségi változókra a (6.15) egyenlet segítségével, és használjuk ismét a $v_i = \sum_j w_j D_{ji}$, $d_i = \sum_j D_{ij}^{-1}$ és $\theta_i = \sum_j D_{ij}^{-1} \mu_j$ jelöléseket. Az x_{it} mintából becslült \mathcal{R}_ϕ kockázat minimalizációja ennek megfelelően az alábbi feltételes szélsőérték problémával ekvivalens:

$$\min_{\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{z}} \sqrt{N} \left(\phi \sqrt{y} - \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T u_t - \sum_{i=1}^N \theta_i v_i \right), \quad (7.15)$$

$$\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left(u_t - \frac{1}{T} \sum_{s=1}^T u_s \right)^2 = y, \quad (7.16)$$

$$\sum_{i=1}^N v_i z_{it} = u_t, \quad (7.17)$$

$$\sum_{i=1}^N d_i v_i = N. \quad (7.18)$$

A megfelelő statisztikus fizikai modell állapotösszege a

$$Z = \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^N dv_i \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{t=1}^T du_t \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_0^{\infty} d\xi e^{-\beta \mathcal{H}(\mathbf{v}, \xi, \mathbf{u}, y)} \prod_{t=1}^T \delta \left(\sum_{i=1}^N v_i z_{it} - u_t \right) \delta \left(\sum_{i=1}^N v_i d_i - N \right) \quad (7.19)$$

alakban írható, ahol a Hamilton-függvény

$$\mathcal{H}(\mathbf{v}, \xi, \mathbf{u}, y) = \sqrt{N} \left(\phi \sqrt{y} - \frac{N}{T} \sum_{t=1}^T u_t - \sum_{i=1}^N \theta_i v_i \right) + \frac{\xi}{2} \left[\sum_{t=1}^T \left(u_t - \frac{1}{T} \sum_{s=1}^T u_s \right)^2 - T y \right]. \quad (7.20)$$

Ezt követően alkalmazzuk a replika-trükköt és végezzük el lépésről lépésre a 6.2.2. és 6.2.3. szakaszban leírt átalakításokat (6.17) helyett a (7.19) állapotösszeget. Számos mechanikus Gauss-integrálást követően arra jutunk, hogy

$$\mathbb{E}[Z^n] \propto \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{a,b} dQ^{ab} \int_{-i\infty}^{i\infty} \prod_{a,b} d\hat{Q}^{ab} \int_0^{\infty} \prod_a dy^a \int_0^{\infty} \prod_a d\xi^a e^{-N G_{\beta}(\mathbf{Q}, \hat{\mathbf{Q}}, \mathbf{y}, \xi)}, \quad (7.21)$$

ahol

$$G_{\beta}(\mathbf{Q}, \hat{\mathbf{Q}}, \mathbf{y}, \xi) = -\frac{1}{2} \sum_{a,b} \hat{Q}^{ab} (Q^{ab} - \gamma) - \frac{1}{2} \beta^2 \kappa \sum_{a,b} (\hat{Q}^{-1})^{ab} + \frac{1}{2} \text{Tr} \ln \hat{\mathbf{Q}} + \frac{1}{2r} \text{Tr} \ln \mathbf{Q} + \frac{\beta \phi}{\sqrt{N}} \sum_a \sqrt{y^a} - \frac{\beta}{2N} \sum_a \xi^a y^a - \beta \omega n - \frac{1}{N} \ln A_{\beta}(\mathbf{Q}, \xi), \quad (7.22)$$

és

$$A(\mathbf{Q}, \xi) = \int du_t^a e^{-\frac{1}{2N} \sum_{a,b} (\mathbf{Q}^{-1})^{ab} \sum_t u_t^a u_t^b + \frac{\beta r}{\sqrt{N}} \sum_{a,t} u_t^a - \frac{\beta r}{2N} \sum_{a,t} \xi^a u_t^{a^2} + \frac{\beta r^2}{2N^2} \sum_a \xi^a (\sum_t u_t^a)^2}. \quad (7.23)$$

Ismét bevezetjük a

$$Q^{ab} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v_i^a \bar{v}_i^b \quad (7.24)$$

átfedési mátrixot, valamint alkalmazzuk az $r = N/T$, $\gamma = N/A$, $\omega = \sqrt{N}B/A$ és $\kappa = (AC - B^2)/A$ jelöléseket. Belátható, hogy γ , ω és κ nemnegatív, továbbá az általánosság megszorítása nélkül feltesszük, hogy a γ , ω és κ mennyiségeknek az $N \rightarrow \infty$ limeszben létezik határértéke, és az nem végtelen. Speciálisan, korrelálatlan ($\sigma_{ij} = \delta_{ij}$) és zérus várható értékű ($\mu_i = 0$) hozamok esetén $\gamma = 1$ és $\omega = \kappa = 0$.

Ezen a ponton ismét a nyeregpont módszert szeretnénk alkalmazni. Ehhez meg kell határoznunk $G_{\beta}(\mathbf{Q}, \hat{\mathbf{Q}}, \mathbf{y}, \xi)$ minimumát, de sajnos a parciális deriváltakat zérussá téve igen bonyolult egyenleteket kapunk, amelyek explicit megoldása nem egyszerű. Mint említettük, a rendezetlen rendszerek elméletében ilyenkor az a megszokott eljárás, hogy replika-szimmetrikus ansatz-ot alkalmazunk,

azaz feltesszük, hogy változóink a nyeregpontban $Q^{ab} = q + \Delta q \delta^{ab}$, $\hat{Q}^{ab} = \hat{q} + \Delta \hat{q} \delta^{ab}$, $y = y^a$ és $\xi^a = \xi$ alakúak lesznek. Ilyen módon a G_β függvény némi számolás után a

$$G_\beta(\mathbf{Q}, \hat{\mathbf{Q}}, \mathbf{y}, \xi) = n [1/2 + g_\beta(q, \Delta q, \hat{q}, \Delta \hat{q}, y, \xi)] + O(n^2) \quad (7.25)$$

alakra hozható, ahol

$$g_\beta(q, \Delta q, \hat{q}, \Delta \hat{q}, y, \xi) = \frac{1}{2} \left[-q \Delta \hat{q} - \hat{q} \Delta q - \Delta \hat{q} \Delta q + \gamma \Delta \hat{q} - \frac{\beta^2 \kappa}{\Delta \hat{q}} + \ln \Delta \hat{q} - 2\beta \omega + \right. \\ \left. + \frac{\hat{q}}{\Delta \hat{q}} + \frac{1}{r} \ln \Delta q + \frac{q}{r \Delta q} + 2\phi \beta \sqrt{\frac{y}{N}} - \frac{\beta y \xi}{N} \right] - \frac{1}{N} \lim_{n \rightarrow 0} \ln \frac{1}{n} A(q, \Delta q, \xi), \quad (7.26)$$

és

$$A(q, \Delta q, \xi) = \int du_t^a e^{\frac{q}{2N\Delta q^2} \sum_t (\sum_a u_t^a)^2 - \frac{1}{2N\Delta q} \sum_{a,t} u_t^a{}^2 - \frac{\beta \xi r}{2N} \sum_{a,t} u_t^a{}^2 +} \\ e^{+\frac{\beta r}{N} \sum_{a,t} u_t^a + \frac{\beta \xi r^2}{2N^2} \sum_a (\sum_t u_t^a)^2}. \quad (7.27)$$

A \hat{q} , $\Delta \hat{q}$ és y szerinti optimalizáció $A(q, \Delta q, \xi)$ -t nem érinti, így könnyen elvégezhető. A változók minimumbeli értékét visszahelyettesítve kapjuk, hogy

$$g(q, \Delta q, \xi) = \frac{1}{2} \left[\frac{\beta \gamma}{\Delta q} - \beta \kappa \Delta q + \frac{r-1}{r} \left(\ln \Delta q + \frac{q}{\Delta q} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\beta \phi^2 r}{\xi} + 2\beta \omega \right] + \frac{1}{Nn} \ln A(q, \Delta q, \eta). \quad (7.28)$$

A $g_\beta(q, \Delta q, \xi)$ függvényből tehát a

$$\mathbb{E} [f(\beta, \Delta q, \xi)] = \frac{1}{\beta} \left[g_0 + \lim_{N \rightarrow \infty} g_\beta(q, \Delta q, \xi) \right] \quad (7.29)$$

képlettel közvetlenül meghatározható a szabadenergia-sűrűség, ahol g_0 legfeljebb r -től függ. E függvény minimuma szolgáltatja zérus hőmérsékleten a portfólió optimalizációs probléma megoldását.

Ehhez azonban ki kell még számítanunk az u_t^a szerinti integrált, amihez Hubbard-Stratonovich-transzformáció segítségével linearizáljuk az exponensben szereplő $\frac{q}{2N\Delta q^2} \sum_t (\sum_a u_t^a)^2$ mennyiséget és az a szerinti produktumot kiemeljük az integrál elé. Ekkor $A_\beta(q, \Delta q, \xi)$ a

$$A_\beta(q, \Delta q, \xi) = \int \prod_t dF_q(s_t) e^{n h_\beta(\mathbf{s}, q, \Delta q, \xi)} \quad (7.30)$$

alakot ölti, ahol

$$h_\beta(\mathbf{s}, q, \Delta q, \xi) = \ln \int du_t e^{-\frac{1}{2N} \left(\frac{1}{\Delta q} + r\beta \xi \right) \sum_t u_t^2 + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_t \left(\frac{q}{\Delta q} + \beta r \right) u_t + \beta \xi \frac{r^2}{2N^2} \left(\sum_t u_t \right)^2}, \quad (7.31)$$

és $dF_q(s)$ a zérus várható értékű és q varianciájú Gauss-mértéket jelöli:

$$dF_q(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi q}} e^{-\frac{1}{2q}s^2} ds. \quad (7.32)$$

A (7.31) kifejezés integrandusában szereplő exponenciális függvényt, illetve a logaritmussfüggvényt Taylor-sorba fejtvé (7.30) alapján könnyen belátható, hogy

$$\ln A_\beta(q, \Delta q, \xi) = n \int dF_q(s) h_\beta(s, q, \Delta q, \xi) + O(n^2). \quad (7.33)$$

A $dF_q(s)$ és du_t^q mértékek szerinti Gauss-integrálokat elvégezve, és az eredményt (7.28)-ba helyettesítve megkapjuk a szabadenergia-sűrűség várható értékét termodinamikai határesetben:

$$f_\beta(q, \Delta, z, \xi) = g_0 + \frac{\gamma}{2\Delta} + \frac{1-r}{2r} \left(\frac{1}{\beta} \log \frac{\Delta}{\beta} + \frac{q}{\Delta} \right) + \frac{\phi^2}{2\xi} - \frac{1}{2} \kappa \Delta - \omega + \frac{1}{2r} \left[\frac{1}{\beta} \log \left(\frac{2\pi\Delta}{1+r\xi\Delta} \right) + \frac{q}{\Delta + r\xi\Delta^2} + \Delta r^2 \right], \quad (7.34)$$

ahol bevezettük a $\Delta = \beta\Delta q$ jelölést. Világos, hogy zérus hőmérsékleten $f_\beta(q', \Delta, \xi')$ csak akkor lesz véges és nullától különböző, ha Δ szintén véges marad, más szóval $\Delta q = O(\beta^{-1})$, és az átfedési mátrix diagonális és nemdiagonális elemei közötti különbség eltűnik. (Ugyanezt láttuk a 6.2.5. alfejezetben, a szórás optimalizációja esetén.)

Vezessük be a $\xi' = \xi\Delta$ és $q' = q/\Delta^2$ változókat, és vegyük (7.34) nulla hőmérsékletű limeszét:

$$f(q', \Delta, \xi') = \frac{1}{2\Delta} + \frac{\Delta}{2r} \left[q' \left(1 - r - \frac{1}{1+\xi'} \right) + r^2 \left(\frac{\phi^2}{\xi} - 1 - \frac{\kappa}{r} \right) \right] - \omega. \quad (7.35)$$

E függvényt minimalizálva kapjuk, hogy zérus hőmérsékleten a nyeregponiban

$$q'^* = \phi^2, \quad (7.36)$$

$$\Delta^* = [(1-r)\phi^2 - r - \kappa]^{-1/2}, \quad (7.37)$$

$$\xi'^* = \frac{r}{1-r}. \quad (7.38)$$

A (7.37) egyenlet alapján világos, hogy a nyeregponiban csak akkor létezik, ha $(1-r)\phi^2 - r - \kappa > 0$. Amennyiben ez teljesül, a szabadenergia-sűrűség – amely arányos a kockázat becsült minimumával – az

$$f = \frac{1}{\sqrt{N}} \hat{\mathcal{R}}_\phi^* = \sqrt{\gamma[(\phi^2 - \kappa) - r(\phi^2 + 1)]} - \omega \quad (7.39)$$

alakot ölti. A továbbiakban megvizsgáljuk az optimum létezésének feltételét, és meghatározzuk miként függ q_0 a probléma paramétereitől.

7.3.3. Az optimum létezése

Mint láttuk, a nyeregpont csak akkor értelmes, ha az (7.37) kifejezés baloldalán a szükséges zárójelen belüli kifejezés pozitív. A $\kappa = (AC - B^2)/A$ -t behelyettesítve némi átrendezés után kapjuk, hogy ekkor N nagy értékeire aszimptotikusan teljesül a

$$\psi(\phi) = B^2 - AC + A\phi^2 > Ar(\phi^2 + 1) \quad (7.40)$$

egyenlőtlenség. A fejezet elején azt láttuk, hogy amennyiben teljes információ alapján optimalizálunk, a minimum létezésének feltétele $\psi(\phi) > 0$, ahol a ψ függvény a hozamok eloszlásának valódi paramétereit (σ_{ij} és μ_i) tartalmazza. Mivel azonban $Ar(\phi^2 + 1) > 0$, véges mintából történő becslés esetén a $\psi(\phi) > 0$ feltétel ugyan szükséges, de nem elégséges az optimális portfólió létezéséhez. Azt látjuk tehát, hogy a becsült optimum létezése még akkor sem garantált, ha a valódi optimum létezik.

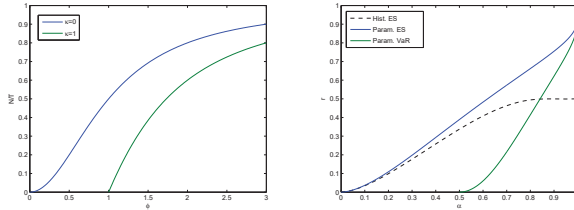
Más szóval, az $N \rightarrow \infty$ határesetben ϕ minden értékéhez N/T -nek létezik egy olyan $r_c(\phi)$ kritikus értéke, hogy ha $N/T < r_c(\phi)$, akkor az optimalizációs feladatnak van megoldása, ellenkező esetben nincs. A (7.37) egyenlet alapján tehát a kritikus N/T értékek a

$$r_c(\phi, \kappa) = \frac{\phi^2 - \kappa}{\phi^2 + 1} \quad (7.41)$$

görbe mentén helyezkednek el, amit a 7.1. ábra bal oldalán ábrázoltunk $\kappa = 0$ és $\kappa = 1$ mellett. Egy adott κ -ra tehát ez a görbe két fázisra osztja az r - ϕ síkot: a görbe alatti tartományban a létezik optimális portfólió, míg a görbe feletti tartományban a portfólióválasztási feladat nem megoldható.

Amennyiben a valódi optimum létezik (azaz $\psi(\phi) > 0$), könnyen belátható, hogy egyszerűen $0 < r_c(\phi, \kappa) < 1$, másrészt $r_c(\phi)$ szigorúan monoton nő és $\lim_{\phi \rightarrow \infty} r_c(\phi) = 1$. Ennek következtében tetszőleges $\alpha < 1$ konfidenciaszint mellett fennáll, hogy az optimum létezéséhez szükséges megfigyelések minimális száma nagyobb, mint N – ellentétben a szórás optimalizációjával, ahol ez a minimális szám maga az N . ($\alpha = 99\%$ esetén például az r_c értéke 0.844 a VaR esetén és 0.877 az ES esetén.)

Az $r_c(\phi, \kappa) > 0$ feltétel miatt az optimum létezéséhez a $\phi^2 > \kappa$ egyenlőtlenségnek is teljesülnie kell, a (7.41) görbe tehát a vízszintes tengelyt $\phi = \sqrt{\kappa}$ helyen fogja metszeni, továbbá $\kappa_1 < \kappa_2$ -ből következik, hogy $r_c(\kappa_1) > r_c(\kappa_2)$, azaz minél nagyobb κ , annál kisebb lesz a portfólió optimalizációs probléma megoldhatósági tartománya. (Mindezt a 7.1. ábra bal oldali diagramja jól érzékelteti.) Mivel $A\kappa = AC - B^2 = \sum_{i,j,k,l} \sigma_{ij}^{-1} \sigma_{kl}^{-1} (\mu_k - \mu_j) \mu_l$, könnyen belátható, hogy κ pontosan akkor zérus, ha $\mu_i = \mu$ minden i -re, ahol μ tetszőleges valós konstans (akár zérus is lehet). κ tehát bizonyos értelemben a hozam-várhatóértékek (varianciákkal/kovarianciákkal súlyozott) inhomogenitását méri. Minél kevésbé homogén a hozamok várható értéke, annál hosszabb időszakkal tudjuk csak garantálni az optimális portfólió létezését. Ennek a gyakorlatban sajnos komoly jelentősége lehet, hiszen különböző típusú vállalatok részvényhozamai között igen nagy eltérések lehetnek. Ezt némileg ellensúlyozhatja az a tény, hogy κ a várható értékeket a varianciák reciprokával súlyozva hasonlítja össze, márpedig tipikusan egy eszköz hozamának annál nagyobb a szórása, minél



7.1. ábra. *Bal oldal:* A kritikus N/T értékek ϕ függvényében $\kappa = 0$ és $\kappa = 1$ mellett. *Jobb oldal:* A kritikus N/T értékek α függvényében VaR (zöld vonal) és ES (kék vonal) esetén. Összehasonlításképpen a historikus módszerrel optimalizált ES fázisgörbéjét is feltüntettük szaggatott vonallal.

nagyobb a várható értéke.

A 7.1. ábra jobboldali grafikonján együtt ábráztunk a parametrikus becsléssel optimalizált VaR és ES, illetve a historikus becsléssel optimalizált ES (lásd 4.2.2. szakasz) fázisdiagramját, $\kappa = 0$ mellett. Jól látható, hogy mind a parametrikus VaR, mind pedig a historikus ES görbéje a parametrikus ES fázisgörbéje alatt fekszik. Más szóval ugyanolyan konfidenciaszint mellett a parametrikus VaR és ES közül az utóbbi lesz a stabilabb. Ehhez hasonlóan a parametrikus ES optimalizáció stabilabb a historikus módszernél, tehát adott α mellett a historikus optimum létezése csak hosszabb idősor használatával biztosítható, mint a parametrikus optimum létezése. Ez megfelel a várakozásunknak, ugyanakkor figyelemreméltó az a tény, hogy a parametrikus becslés csak csökkenti az instabilitást, de nem szünteti meg.

Amint azt korábban említettük, a $\phi = 1$ választással (7.1) éppen a szemivarianciát adja. Standard normális eloszlású hozamok esetén ($\kappa = 0$), tehát a szemivariancia optimalizáció kritikus értéke $r_c = 1/2$, ami nagyobb zajérzékenységet jelent, mint amekkorát a VaR és az ES mutat a szokásos (90% feletti) konfidenciaszinteken. Ennél még rosszabb a helyzet, ha $\kappa > 0$, hiszen ekkor $r_c = \frac{1}{2}(1 - \kappa)$, és amennyiben $\kappa \geq 1$, egyáltalán nincs megoldás.

7.3.4. A q_0 becslési hiba

Folytassuk elemzésünket $\tilde{\mathbb{E}}[q_0]$ meghatározásával. A (7.13), (7.14) és (7.24) egyenletek alapján könnyen belátható, hogy termodinamikai limeszben

$$\tilde{\mathbb{E}}[q_0] = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\phi \langle \sqrt{NQ^{aa}} \rangle - \sum_i \theta_i \langle w_i \rangle}{\mathcal{R}_\phi^*}, \quad (7.42)$$

ahol $\langle \cdot \rangle$ a termodinamikai átlagot jelöli. A nevező éppen (7.12), amely az átskálázott költségvetési korlátot figyelembe véve, és a később bevezetett jelölésekkel felírva

$$\mathcal{R}_\phi^* = \sqrt{N} \left(\sqrt{\gamma(\phi^2 - \kappa)} - \omega \right). \quad (7.43)$$

Mivel termodinamikai határesetben a tetszőleges értékére $Q^{aa} = q^* \Delta^{*2} + \Delta^*/\beta$, azt kapjuk, hogy nulla hőmérsékleten

$$Q^{aa} = \frac{\gamma\phi^2}{(\phi^2 - \kappa) - r(\phi^2 + 1)}. \quad (7.44)$$

Továbbá (7.19) alapján $\langle w_i \rangle = -\sqrt{N} \partial f / \partial \theta_i$, a $\beta \rightarrow \infty$ határesetben tehát

$$\sum_i \theta_i \langle w_i \rangle = -\sqrt{N} \sum_i \theta_i \frac{\partial f}{\partial \theta_i} = \frac{\sqrt{N\gamma\kappa}}{\sqrt{(\phi^2 - \kappa) - r(\phi^2 + 1)}} + \sqrt{N}\omega. \quad (7.45)$$

Kihasználva, hogy zérus hőmérsékleten a termikus fluktuációk eltűnnek, azaz $\langle \sqrt{Q^{aa}} \rangle = \sqrt{\langle Q^{aa} \rangle}$, a (7.43), (7.44) és (7.45) egyenleteket (7.42)-be helyettesítve némi átalakítás után kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}[q_0] = \frac{\sqrt{\gamma(\phi^2 - \kappa)}}{\sqrt{\gamma(\phi^2 - \kappa) - \omega}} \sqrt{\frac{r_c(\phi, \kappa)}{r_c(\phi, \kappa) - r}} - \frac{\omega}{\sqrt{\gamma(\phi^2 - \kappa) - \omega}}. \quad (7.46)$$

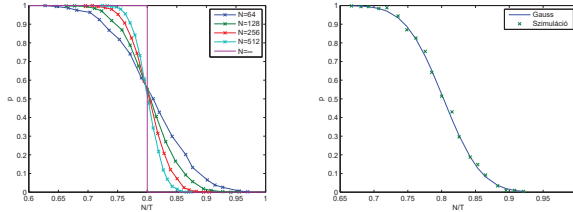
Jól látható, hogy amennyiben r közel van az $r_c(\phi, \kappa)$ kritikus ponthoz a becslési hiba $q_0 \sim (r_c - r)^{-1/2}$ módon divergál. Az ES, VaR és szemivariancia parametrikus optimalizációja a kritikus pontban tehát ugyanazzal a kritikus exponenssel divergál, mint az átlagos eltérés, a variancia, a maximális veszteség és a historikus ES. Ez arra utal, hogy a parametrikus VaR/ES optimalizáció mint statisztikus fizikai modell, ugyanabba az univerzalitási osztályba tartozik mint a fent említett kockázati mértékek.

7.3.5. Numerikus eredmények

Mint említettük, a replika módszer kényes pontját jelentő analitikus folytatás egyértelműségében nem lehetünk biztosak, így kapott eredményeinket érdemes numerikus számításokkal is alátámasztani. Ehhez az egyszerűség kedvéért a $\sigma_{ij} = \delta_{ij}$ és $\mu_i = 0$ esetet tekintettük, és véletlenszámgenerátor segítségével standard normális eloszlású mintákat generáltunk. A becsült kovariancia mátrix és várható értékek alapján minden egyes mintán megvizsgáltuk, hogy ϕ különböző értékei mellett létezik-e optimális portfólió. Az optimum létezésének valószínűsége tehát N , T és ϕ adott értékei mellett a következő módon becsülhető:

1. Generáljunk egy $N \times T$ méretű $\{x_{it}\}$ mintát!
2. Becsüljük meg az átlagot $\{x_{it}\}$ -ből a (4.4) és a (4.5) egyenletek alapján!
3. A (7.11) feltétel alapján ellenőrizzük, hogy az $\{x_{it}\}$ mintán a portfólióválasztási feladatnak van-e megoldása!
4. Ismételjük meg a 1-3. lépéseket K -szor, és számoljuk meg hány esetben létezik az optimum. Legyen ez a szám L . Az optimum létezésének becsült valószínűsége tehát $\hat{p}(N, T, \phi) = L/K$ lesz.

Természetesen minél nagyobb K , annál pontosabb lesz a \hat{p} becslés.

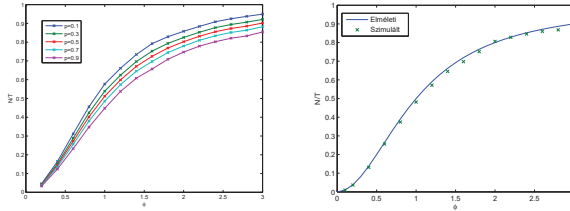


7.2. ábra. *Bal oldal:* Az optimum létezésének numerikus módszerrel mért valószínűsége N/T függvényében N különböző értékeire, $\phi = 2$ mellett. A (replika módszerrel számított) $N = \infty$ címkejű görbe a termodinamikai határesetnek felel meg. *Jobb oldal:* A mért valószínűségekre illesztett Gauss-görbe $N = 128$ és $\phi = 2$ mellett.

$\phi = 2$ esetére a numerikus eredmények a 7.2. ábra bal oldalán láthatók. ($\phi = 2$ VaR esetén $\alpha = 0.9772$ -nek, míg ES esetén $\alpha = 0.9420$ -nak felel meg. Az iterációk száma $K = 2000$ volt, és a p - ϕ görbét N számos értékére (64, 128, 256 és 512) kimértük. A 7.3.2. alfejezet eredményei szerint $\phi = 2$ mellett N/T kritikus értéke $r_c = 0.8$, termodinamikai límeszben tehát az optimum létezésének valószínűsége 1, ha $N/T < 0.8$, és a kritikus értéknél hirtelen lecsökken 0-ra (lásd a $N = \infty$ jelű görbét az ábrán). A grafikonon jól látható, hogy N és T véges értékeire az optimum létezésének valószínűsége folytonosan csökken 1-ről 0-ra. N növekedtével ugyanakkor a görbe a várakozásoknak megfelelően egyre meredekebben esik. A különböző N értékekhez tartozó görbék szemmel láthatólag ugyanabban a pontban metszik egymást, ennek a pontnak tehát éppen az r_c kritikus értékkel kell megegyeznie. A görbék közös metszéspontja az ábra szerint igen közel esik $r = 0.8$ -hoz, kitűnő egyezésben a replika módszerrel levezetett elméleti eredményekkel.

Megállapítható továbbá, hogy a szimulált pontok igen jól illeszkednek a $g_{\mu,\sigma}(x) = 1 - \Phi((x - \mu)/\sigma)$ függvényre, ahol $\Phi(x)$ a standard normális eloszlásfüggvény, továbbá μ és σ az illesztendő paraméterek (az illesztés történhet pl. maximum likelihood módszerrel). A 7.2. ábra jobb oldalán feltüntettük a szimulált adatpontokat és az illesztett görbét $N = 128$ és $\phi = 2$ értékek mellett (Az illesztett paraméter értékek: $\mu = 0.8028$ és $\sigma = 0.0446$). Világos, hogy $g_{\mu,\sigma}(x)$ nem lehet a p - N/T függés pontos modellje, hiszen $N/T > 1$ esetben $p = 0$. Ez azonban N növekedtével fokozatosan jelentőségét veszti, hiszen σ egyre kisebb lesz. Így tehát $g_{\mu,\sigma}(x)$ numerikus adatokhoz történő illesztésével p N/T -től és ϕ -től való függését igen pontosan becsülhetjük még alacsony K mellett is. Tapasztalatunk szerint ezzel a módszerrel a szimulációk futási ideje ugyanolyan pontosság mellett nagyjából egytizedére vagy akár egyszázadára csökkenthető.

További numerikus vizsgálatok alapján azt találtuk, hogy az $r_c(\phi)$ kritikus értékek körül a $p(N, T, \phi)$ valószínűség tetszőleges ϕ -re a 7.2. ábrán látható viselkedést követi, de ϕ -től függően más és más ütemben esik 1-ről 0-ra. E függés vizsgálatára az N/T - ϕ síkon meghatároztuk a konsztans p -hez tartozó szintvonalakat $p = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7$ és 0.9 -re, $N = 128$ mellett. Az iterációk számát $K = 100$ -nak választottuk és a numerikus adatpontokra illesztettük $g_{\mu,\sigma}(x)$ -t. Az eredmény



7.3. ábra. *Bal oldal:* A p valószínűség szintvonalai az $N/T - \phi$ síkon $N = 128$ mellett. *Jobb oldal:* A numerikus és analitikus úton számolt fázishatár összehasonlítása.

a 7.3. ábra bal oldalán látható, amit a 7.1. ábra bal oldalához hasonlítva jól látható, hogy a szintvonalak a replika-módszerrel számolt fázisgörbe körül helyezkednek el, és ahhoz hasonló alakúak. Mint említettük, a kritikus pontot egy adott ϕ -re a különböző N -hez tartozó p - N/T görbék metszéspontja határozza meg. Ennek megfelelően ϕ különböző értékei mellett a szimulációkat $N = 64$ és $N = 128$ mellett is lefuttattuk ($K = 100$), majd az így kapott p értékekre illesztettük $g_{\mu,\sigma}(x)$ -t. Így ϕ minden értékére két görbét kaptunk, amelyek metszéspontjait a 7.3. ábra jobb oldali grafikonján ábrázoltuk, (zöld pontok) és mellette feltüntettük a replika-módszerből kapott görbét (kék vonal). A szimulált pontok és az elméleti görbe igen jó egyezést mutatnak, ami alátámasztja a replika-módszerből származó eredmények érvényességét.

7.4. ES és VaR minimalizáció elvart hozam mellett

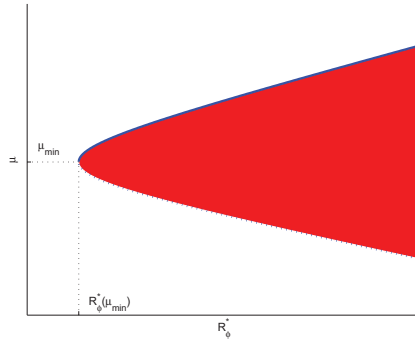
7.4.1. Hatékony portfóliók teljes információ mellett

Az eddigiekben a kockázat globális minimumát kerestük, ugyanakkor a klasszikus Markowitz-feladatban a portfólió várható hozamát is rögzíteni szokás. Egészítsük ki tehát a (7.4)-(7.6) egyenletekkel definiált optimalizációs problémát a

$$\sum_{i=1}^N w_i \mu_i = \mu \quad (7.47)$$

kényszerrel, ahol μ jelöli a befektetésünk után elvart hozamot. Egy újabb η Lagrange-multiplikátor bevezetésével tehát (7.7) alapján az új probléma Lagrange-függvénye az

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{w}, y, \eta, \lambda, \xi) = & \phi\sqrt{y} - (1 + \eta) \sum_i w_i \mu_i + \eta\mu + \\ & + \lambda \left(\sum_i w_i - 1 \right) + \frac{\xi}{2} \left(\sum_{ij} w_i \sigma_{ij} w_j - y \right) \end{aligned} \quad (7.48)$$



7.4. ábra. Példa a lehetséges (piros terület) és a hatékony (folytonos kék görbe) portfóliók halmazára paraméteres VaR/ES esetén.

alakban írható. Tekintsük egyelőre η -t egy konstans paraméternek, és vezessük be a $\mu'_i = (1 + \eta)\mu_i$ jelölést. Ha (7.7)-ben végrehajtjuk a $\mu_i \rightarrow \mu'_i$ változócsereket, akkor az $\eta\mu$ additív konstansról eltekintve pontosan olyan alakú lesz, mint (7.48), így a 7.2. szakasz eredményei egy az egyben érvényben maradnak, ha végrehajtjuk a $B \rightarrow (1 + \eta)B$ és $C \rightarrow (1 + \eta)^2 C$ helyettesítéseket, és (7.12)-hez hozzáadjuk $\eta\mu$ -t. Azt kapjuk tehát, hogy az optimum létezésének feltétele $\psi(\phi, \eta) = (1 + \eta^2)(B^2 - AC) + A\phi^2 > 0$, és amennyiben ez a feltétel teljesül, a minimális kockázat az η Lagrange-multiplikátor függvényében

$$\mathcal{R}_\phi(\eta) = \frac{\sqrt{\psi(\phi, \eta)} - B}{A} + \eta \frac{A\mu - B}{A}. \quad (7.49)$$

Ezt a kifejezést η -ban minimalizálva jutunk el az optimális kockázathoz μ elvárt hozam mellett. A minimalizációt elvégezve azt kapjuk, hogy η szerinti parciális deriváltnak két zérushelye lesz:

$$\eta_\pm^*(\mu) = \pm \frac{\phi(A\mu - B)}{\sqrt{(A\mu^2 - 2B\mu + C)(AC - B^2)}} - 1. \quad (7.50)$$

Könnyen belátható, hogy $\lim_{|\mu| \rightarrow \infty} \mathcal{R}_\phi(\eta_\pm^*(\mu)) = \pm\infty$. Mivel azt várjuk, hogy magasabb várható hozamot csak magasabb kockázat árán érhetünk el, pénzügyi értelemben csak $\eta_+^*(\mu)$ ad értelmes megoldást, amelyet a továbbiakban $\eta^*(\mu)$ -vel jelöljük. A μ elvárt hozamhoz tartozó minimális kockázat tehát $\mathcal{R}_\phi^*(\mu) = \mathcal{R}_\phi(\eta^*(\mu))$ lesz, ami éppen a (2.16) megfelelője, azaz megkaptuk a határportfóliókat leíró görbét paraméteres VaR illetve ES optimalizáció esetén. A 2.1. ábrához hasonlóan elkészíthetjük a lehetséges, határ- és hatékony portfóliók halmazainak diagramját (lásd a 7.4. áb-

rát). Az $\eta = 0$ választással vissza kell kapnunk a hozamelvárás nélküli, (7.4)-(7.6) egyenletekkel definiált portfólióválasztási feladatot, és vele együtt a kockázat globális minimumát. Ennek megfelelően a legkisebb kockázatú hatékony portfólió várható értéke az $\eta^*(\mu) = 0$ egyenlet alapján

$$\mu_{\min} = \frac{AC - B^2}{A\sqrt{\psi(\phi, 0)}} + \frac{B}{A} \quad (7.51)$$

lesz, az ehhez tartozó kockázat pedig $\mathcal{R}_\phi^*(\mu_{\min}) = \mathcal{R}_\phi(\eta = 0)$.

7.4.2. A hatékony portfóliók becslési hibája

Mintából történő becslés esetén a fentiekkel teljesen analóg módon megismételhetjük a replika-módszeren alapuló számításokat is. Vezessük be az η Lagrange-multiplikátort és a (7.20) Hamilton-függvényhez adjunk $\sqrt{N}\eta\mu$ -t, valamint végezzük el a $\mu_i \rightarrow (1 + \eta)\mu_i$ változócserét. A Z , illetve Z^n állapotösszegekben természetesen az η , illetve η^a változók szerint integrál is megjelenik, amelyeket a Q^{ab} , \hat{Q}^{ab} , y^a és ξ^a szerinti integrálokhoz hasonlóan szintén a nyeregpont közelítésben határozzuk meg. Nyilvánvaló, hogy a teljes levezetés érvényben marad, ha minden képletben (ahol releváns) elvégezzük a $\kappa \rightarrow (1 + \eta)^2\kappa$ illetve $\omega \rightarrow (1 + \eta)\omega$ helyettesítéseket. Azt kapjuk tehát, hogy termodinamikai limeszben a zérus hőmérsékleti szabadenergia-sűrűség

$$f(\eta) = \sqrt{\gamma[(\phi^2 - (1 + \eta)^2\kappa) - r(\phi^2 + 1)]} - (1 + \eta)\omega + \eta\mu. \quad (7.52)$$

A mintából becsült optimumot, illetve annak becsült kockázatát $f(\eta)$ minimuma adja. Jelölje ezt a minimumhelyet $\eta^*(\mu)$ -től való megkülönböztetésül $\hat{\eta}^*(\mu)$. A minimalizációt elvégezve azt kapjuk, hogy

$$\hat{\eta}^*(r, \mu) + 1 = \frac{\sqrt{\phi^2 - r(\phi^2 + 1)}}{\phi}(\eta^*(\mu) + 1), \quad (7.53)$$

tehát $r > 0$ esetén minden μ -re $\hat{\eta}^*(\mu) < \eta^*(\mu)$, és amint $r \rightarrow 0$, azaz az N -hez viszonyított mintaméret tart a végtelenhez, $\hat{\eta}^*(\mu) \rightarrow \eta^*(\mu)$, ami megfelel az intuíciónak. A kritikus értékek görbéje továbbá

$$r_c(\phi, \kappa, \mu) = \frac{\phi^2 - \kappa[\hat{\eta}^*(r, \mu) + 1]^2}{\phi^2 + 1}, \quad (7.54)$$

illetve a becslési hiba várható értéke

$$\tilde{\mathbb{E}}[q_0] = \frac{\sqrt{\gamma(\phi^2 - \kappa[\hat{\eta}^*(r, \mu) + 1]^2)}}{\sqrt{\gamma(\phi^2 - \kappa[\eta^*(\mu) + 1]^2)} - \omega} \sqrt{\frac{r_c(\phi, \kappa, \mu)}{r_c(\phi, \kappa, \mu) - r}} - \frac{\omega}{\sqrt{\gamma(\phi^2 - \kappa[\eta^*(\mu) + 1]^2)} - \omega}. \quad (7.55)$$

Könnyen ellenőrizhető hogy az $\eta = 0$ választással a (7.54) és (7.55) egyenletekből várakozásunknak megfelelően rendre visszakapjuk a (7.41) és (7.46) formulákat. Amennyiben azonban megkövetelünk egy bizonyos (μ_{\min} -nél magasabb) hozamszintet, azt tapasztaljuk, hogy minél nagyobb μ (és következésképpen $\hat{\eta}^*(\mu)$), annál kisebb lesz az $r_c(\phi, \kappa, \mu)$ kritikus érték, tehát adott kovarianciamátrixszal, illetve várható értékekkel rendelkező hozamok esetén μ növelésével a becsült optimum

létezésének biztosításához egyre hosszabb idősorra van szükségünk.

A q_0 becslési hiba várható értékét megvizsgálva azt látjuk, hogy egyrészt az $r \rightarrow 1$ limeszben $\hat{\eta}^*(r, \mu) \rightarrow \eta^*(\mu)$ miatt a várakozásoknak megfelelően $\mathbb{E}[q_0] \rightarrow 1$. Másrészt az $r_c(\phi, \kappa, \mu)$ kritikus pont körül továbbra is a $q_0 \sim (r - r_c)^{-1/2}$ viselkedést tapasztaljuk.

7.5. Összefoglalás

Ebben a fejezetben a replika módszer segítségével megvizsgáltuk néhány veszteség oldali kockázati mérték (VaR, ES és szemivariancia) parametrikus becslése esetén a portfólióválasztás zajérzékenységét. Először a kockázat globális minimumát vizsgáltuk és azt tapasztaltuk, hogy az optimum létezése az eloszlás paramétereitől függ. Ugyanakkor a valódi optimum létezése még nem garantálja, hogy ha az eloszlás paramétereit véges mintából becsüljük és a becsült értékek alapján számított kockázatot próbáljuk minimalizálni, akkor ez a becsült minimum szintén létezik. Az optimum létezése véletlen esemény, hiszen a minta függvénye. Abban a limeszben, amikor mind az értékpapírok N számával mind pedig a minta T méretével tartunk a végtelenbe, miközben az $r = N/T$ arányt fixen tartjuk, az r relatív mintaméret és az α konfidenciaszint által meghatározott paramétersík a (7.41) görbe mentén két fázisra esik szét: a görbe alatti tartományban mindig létezik optimum, a görbe feletti tartományban pedig soha. A görbe pontos helye az eloszlás paramétereiből számított κ paramétertől is függ, ahol κ bizonyos értelemben a hozamok várható értékek inhomogenitását méri, hiszen ha az összes várható érték azonos, akkor $\kappa = 0$, egyébként pedig $\kappa > 0$. Minél nagyobb κ (azaz minél erősebb a hozamok inhomogenitása) annál kisebb lesz a stabil fázis. Meghatároztuk továbbá a q_0 becslési hiba modellparaméterektől való függését is, és azt tapasztaltuk, hogy a kritikus pont körül a hiba a szokásos módon, $-1/2$ -es kitevővel divergál.

A fenti eredményeket az elvárt hozam melletti optimalizációra is általánosítottuk. A fenti eredmények érvényben maradnak azzal a módosítással, hogy a fázishatár, illetve a becslési hiba most az elvárt μ hozamtól is függ. Azt láttuk, hogy μ növelésével a probléma instabilitása is növekszik, hiszen a többi paraméterérték változatlansága mellett a nagyobb μ -höz kisebb r_c kritikus érték tartozik, azaz csak hosszabb idősorral biztosítható az optimum létezése.

8. fejezet

Portfólióválasztás GARCH-folyamat mellett

Az eddigiekben végig feltettük, hogy az értékpapír-piaci árfolyammozgások időben függetlenek, normális eloszlásúak és az eloszlás paraméterei állandóak. A dolgozat I. részében már több ponton is utaltunk rá, hogy ez a modell erősen leegyszerűsítő, és az 5. fejezetben röviden bemutattuk a GARCH-modellcsaládot, amely a valódi árfolyammozgások egy sokkal realisztikusabb leírását adják. Ezért nem érdektelen, miként befolyásolja a portfólió optimalizáció becslési hibával szembeni érzékenységét, ha árfolyammozgásaink GARCH-folyamatot követnek. Két fő kérdés merülhet fel ezzel kapcsolatban: 1) Mekkora a tipikus becslési hiba, ha a befektető tisztában van az árfolyamokat vezérlő folyamattal, csak annak a paramétereit nem ismeri, illetve 2) Mekkora a becslési hiba abban az esetben, ha a befektető még a folyamat jellegével sincs tisztában, és független, azonos eloszlású, normális hozamokat feltételez. Ebben a fejezetben [57] alapján mindkét kérdést megvizsgáljuk arra az esetre, ha az árfolyamfluktuációk CCC-GARCH(1,1)-folyamatot követnek, és a kockázatot a befektetések hozamának szórásával mérjük.

8.1. A becslési hiba jellemzése

Először is idézzük fel a CCC-GARCH(1,1)-folyamat definícióját! Legyen a változók (értékpapírok) száma N , és az i . változó t . időszaki belső realizációját jelölje x_{it} . Akkor beszélünk tehát CCC-GARCH(1,1)-folyamatról, ha az x_{it} minden i -re egyváltozós GARCH(1,1)-folyamatot követ, de az i . és j . változó közötti korreláció nem függ t -től azaz $\text{Corr}(x_{it}, x_{jt}) = \rho_{ij}$, ahol ρ_{ij} konstans, és $-1 \leq \rho_{ij} \leq 1$, illetve minden i -re $\rho_{ii} = 1$. Más szóval x_{it} kielégíti az alábbi egyenleteket:

$$x_{it} = \mu + \nu_{it} \sqrt{h_{ii,t}}, \quad (8.1)$$

$$h_{ii,t} = \gamma_i + (\alpha_i \nu_{i,t-1}^2 + \beta_i) h_{ii,t-1}, \quad (8.2)$$

$$\mathbb{E}[\nu_{it} \nu_{js}] = \rho_{ij} \delta_{ts}. \quad (8.3)$$

A t . időszakra vonatkozó feltételes kovariancia mátrixot a

$$h_{ij,t} = \mathbb{E}[x_{it}x_{jt}|\nu_{i,t-1}, \nu_{j,t-1}, h_{ii,t-1}, h_{jj,t-1}] - \mu^2 \quad (8.4)$$

kifejezés definiálja, amelynek a főátlójában a $h_{ii,t}$ feltételes varianciák szerepelnek, míg a főátlón kívüli elemeket a $h_{ij,t} = \rho_{ij}\sqrt{h_{ii,t}h_{jj,t}}$ kifejezés adja meg. Ha tehát pontosan tudjuk, hogyan alakultak az árfolyamok, és azok szórása a $t-1$. időszakig, akkor meghatározhatjuk a t . időszakbeli kovariancia mátrixot is. A portfólióválasztási feladat ennek fényében a

$$\min_{\mathbf{w}} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N h_{ij,t} w_i w_j, \quad (8.5)$$

$$\sum_{i=1}^N w_i = 1 \quad (8.6)$$

alakot ölti¹. A CCC-GARCH-modellben tehát az optimális portfólió súlyok időszakról időszakra ingadoznak.

A gyakorlatban természetesen továbbra sem feltételezhetjük, hogy a befektetők pontosan ismerik az árfolyam-folyamatok paramétereit, vagy akár magát a modellt. Emiatt a kovariancia mátrixot, és rajta keresztül az optimális portfóliót mintából becslik, amely természetesen el fog térni a valódi optimumtól. E mérési hiba jellemzésére szeretnénk újra bevezetni a q_0 mérőszámot, ám a folyamat időfüggő jellege miatt óvatossá kell eljárunk.

Feltesszük tehát, hogy az árfolyammozgások CCC-GARCH(1,1)-folyamatot követnek μ , α_i , β_i , γ_i és ρ_{ij} paraméterekkel. Két esetet fogunk vizsgálni: 1) amikor a befektető tudja, hogy a fluktuációk GARCH-folyamatot követnek, csak nem ismeri a paramétereket, és 2) amikor a befektető tévesen azt hiszi, hogy a fluktuációk egyszerű normális eloszlást követnek, időben állandó várható értékekkel és kovariancia mátrixszal.

Kövessük ismét a (4.6) egyenlethez vezető logikai lépéseket, és tegyük fel, hogy először rögzítjük a modell paramétereit, majd ebből T hosszúságú idősorokat generálunk. A modellparaméterek ismeretében tehát meghatározhatjuk, hogy mi lesz az optimális portfólió a $T+1$. időszakban, ennek a súlyait jelölje $w_{i,T+1}^*$. Képzeljük magunkat először az 1) esetnek megfelelő befektető helyébe. Ez a befektető kizárólag a hozamok elmúlt T időszakbeli x_{it} realizációit ismeri, amelyből az 5.2.2. szakaszban ismertetett módon megbecsüli a $T+1$ időszakbeli $h_{ij,T+1}$ feltételes kovarianciamátrixot. Ezt a (8.5) kifejezésbe helyettesítve, és az így kapott optimalizációs feladatot megoldva jut a $\hat{w}_{i,T+1}^c$ becsült optimális portfólió súlyokhoz. A becsült optimális portfólió, és a valódi optimális portfólió igazi ($h_{ij,t}$ alapján számolt) feltételes varianciáját egymással elosztva kapjuk a becslési hibát:

$$q_0^c = \frac{\sqrt{\sum_{i,j} h_{ij,T+1} \hat{w}_i^c \hat{w}_j^c}}{\sqrt{\sum_{i,j} h_{ij,T+1} w_i^* w_j^*}}, \quad (8.7)$$

¹Ebben a fejezetben az egyszerűség kedvéért a kockázat globális minimumát keressük, de a 6. fejezet eredményeihez hasonlóan következtetéseinket most sem befolyásolná érdemben, ha adott várható hozam mellett optimalizálnánk

ahol az áttekinthetőség érdekében a portfóliósúlyokban nem jelöltük, hogy a $T + 1$. időszakról van szó. A c felső index arra utal, hogy az optimális portfóliósúlyokat a feltételes (conditional) kovariancia mátrixból számoltuk.

Ami a 2) esetet illeti, tegyük most fel, hogy a befektető időben független, normális eloszlású hozamokat feltételez, és naív módon a (4.5) képlettel becsüli a kovarianciákat, azaz a feltételes kovariancia mátrix helyett a feltétel nélküli (unconditional) kovariancia mátrix alapján optimalizál. Ekkor a becsült optimális portfólió $\hat{w}_{i,T+1}^c$ helyett $\hat{w}_{i,T+1}^u$ lesz (a kettő egybeesésnek valószínűsége nulla), a mérési hiba pedig ennek megfelelően a

$$q_0^u = \frac{\sqrt{\sum_{i,j} h_{ij,T+1} \hat{w}_i^u \hat{w}_j^u}}{\sqrt{\sum_{i,j} h_{ij,T+1} w_i^* w_j^*}} \quad (8.8)$$

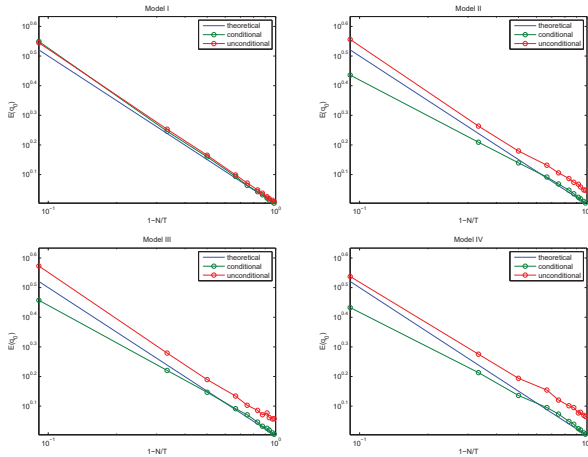
mennyiséggel írható le.

8.2. A becslési hiba numerikus jellemzése

Monte Carlo szimulációk segítségével megvizsgáltuk, hogy a modell paraméterei, illetve a minta méretének függvényében hogyan alakul q_0^u és q_0^c értéke, és mindez hogyan viszonyul a klasszikus Markowitz-modell zajérzékenysége vonatkozó, 4.1.2. alfejezetben ismertetett eredményekhez. Azt is teszteltük továbbá, hogy zajcsökkentő módszerekkel milyen mértékben javítható az optimális portfólió becslése. Ehhez a 4.1.3. szakaszban elsőként bemutatott, a főkomponens analízist véletlen-mátrix technikával egyesítő módszert alkalmaztuk, amely relatíve egyszerű, és alkalmazása már előfordult az irodalomban a CCC-GARCH-modell kapcsán [58]. Természetesen más szűrőmódszereket is alkalmazhatnánk, ez azonban nem változtatna mondanivalónk lényegén.

A CCC-GARCH-folyamatok szimulációját többféle feltételes korrelációs mátrixszal is elvégeztük. Az alábbi négy korrelációs modell-lel dolgoztunk (hasonlóan a [16]-ban elvégzett numerikus vizsgálatokhoz):

- **I. modell:** Korrelálatlan árfolyammozgások, a korrelációs mátrix tehát az identitás.
- **II. modell:** Bármely két értékpapír hozamának korrelációja azonos, ρ_0 . (Ez lényegében megfelel az egyfaktoros piaci modellnek.)
- **III. modell:** Az értékpapírok (pl. részvények) különböző szektortokba (iparágakba) sorolhatók. Minden szektorba azonos számú értékpapír tartozik, az azonos szektorba tartozó bármely két értékpapír korrelációja ρ_1 , míg a különböző szektorokba tartozó értékpapírok korrelációja ρ_0 , ahol $\rho_1 > \rho_0$. A korrelációs mátrix tehát blokkdiagonális, a főátló mentén elhelyezkedő, azonos méretű blokkokkal.
- **IV. modell:** Többsektoros modell, eltérő méretű, és belső korrelációjú szektorokkal. Két különböző szektorba tartozó részvény hozamának korrelációja ρ_0 , míg két, az i . szektorba tartozó értékpapír korrelációja ρ_i , ahol $\rho_i > \rho_0$. A megfelelő korrelációs mátrix ismét blokkdiagonális, de blokkok mérete és korrelációi most különbözőek.



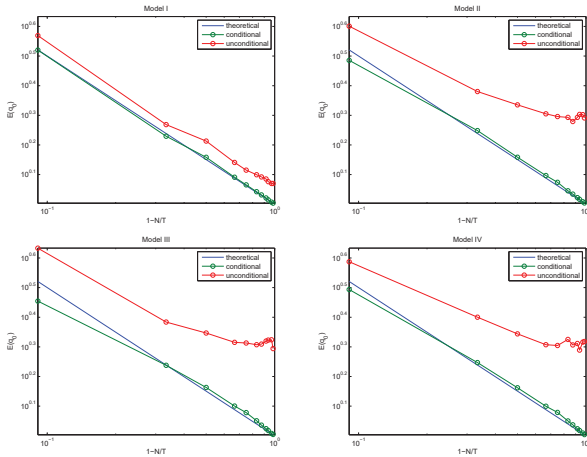
8.1. ábra. $\mathbb{E}[q_0]$ függése az idősor T hosszától, különböző korrelációs modellekre, logaritmusos skálán. Az adatgeneráló GARCH paraméterek: $\gamma_i = 0.03$, $\alpha_i = 0.1$, $\beta_i = 0.6$ minden $i = 1, \dots, N$ -re. Zöld színnel ábráztuk q_0^c -t, piros színnel q_0^u -t, és kék színnel a $q_0 = (1 - N/T)^{-1/2}$ elméleti görbét. (Forrás: [57])

A fenti modellek egyébként speciális esetei a pénzügyi korrelációs mátrixok modellezésére javasolt, ún. Noh-modellek [59].

A szimulációk során az értékpapírok száma $N = 100$ volt, és feltettük, hogy az összes értékpapír hozama ugyanolyan GARCH-folyamatot követ, továbbá kétféle GARCH paraméter-beállítást teszteltünk. A μ_i feltételes várható értékeket mindkét esetben nullának vettük, a többi paraméter az első esetben (minden $i = 1, \dots, N$ -re) $\gamma_i = 0.03$, $\alpha_i = 0.1$ és $\beta_i = 0.6$ volt, míg a második esetben (minden $i = 1, \dots, N$ -re) $\gamma_i = 0.03$, $\alpha_i = 0.15$ és $\beta_i = 0.8$. Továbbá a II. modell esetében a $\rho_0 = 0.3$, a III. modell esetében a $\rho_0 = 0.2$ és $\rho_1 = 0.6$ értékeket használtuk, míg a IV. modell esetében $\rho_0 = 0.2$ volt, továbbá öt darab 30, 10, 20, 15 illetve 25 részvényt tartalmazó szektort feltételeztünk, amelyeken belül a korreláció rendre 0.5, 0.55, 0.6, 0.65 illetve 0.7.

A generált idősorok hossza $T = 110, 150, 200, 300, 400, 600, 800, 1200, 1600, 3200$ és 6400 volt minden egyes korrelációs modellel, és mindkét GARCH paraméter-beállításra (tehát nyolc különböző modellspecifikációra). A szimulált minták felhasználásával megbecsültük a GARCH paramétereket és a feltételes korrelációs mátrixot, majd az alábbi négy módszer mindegyikével meghatároztuk az optimális portfóliót:

- **I. módszer:** optimalizáció a feltétel nélküli kovariancia mátrix alapján



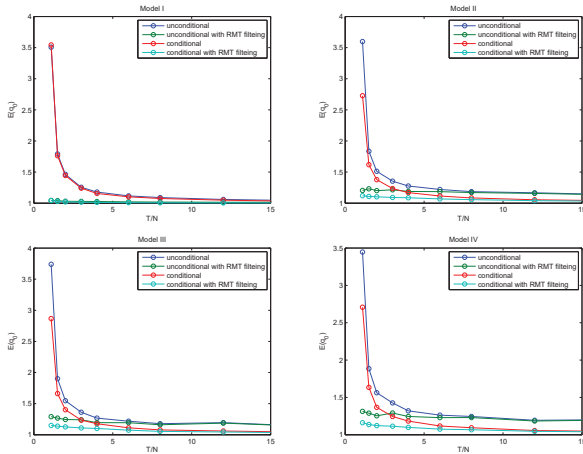
8.2. ábra. $\mathbb{E}[q_0]$ függése az idősor T hosszától, különböző korrelációs modellekre, logaritmusos skálán. Az adatgeneráló GARCH paraméterek: $\gamma_i = 0.03$, $\alpha_i = 0.15$, $\beta_i = 0.8$ minden $i = 1, \dots, N$ -re. Zöld színnel ábrázoltuk q_0^c -t, piros színnel q_0^u -t, és kék színnel a $q_0 = (1 - N/T)^{-1/2}$ elméleti görbét. (Forrás: [57])

- **II. módszer:** optimalizáció a feltétel nélküli kovariancia mátrix alapján, zajszűréssel
- **III. módszer:** optimalizáció a feltételes kovariancia mátrix alapján
- **IV. módszer:** optimalizáció a feltételes kovariancia mátrix alapján, zajszűréssel

Az első két módszer azt feltételezi, hogy a fluktuációk időben független és állandó, normális eloszlást követnek, és ennek megfelelően becslési hibájukat q_0^u -val mérjük. A III. és IV. módszer ezzel szemben a feltételes kovarianciák alapján becsl, így esetükben a mérési hibát q_0^c szolgáltatja. A szimulációt 20-szor lefuttattuk minden modellspecifikációra, módszerre, és idősorhosszra, és az így kapott 20 db. q_0 érték számtani átlagát vettük.

A 8.1. ábra mutatja a szimulációs eredményeket az első GARCH paraméter-beállításra, zajszűrés nélkül (I. és III. módszer), mind a négy korrelációs modellre. A grafikonok q_0^u és q_0^c $1 - N/T$ -től való függését mutatják log-log skálán, és összehasonlításképpen feltüntetjük a klasszikus Markowitz-modellre jellemző, $q_0 = (1 - N/T)^{-1/2}$ egyenletnek megfelelő egyenlet is. Az I. modellre nincs jelentős eltérés q_0^u és q_0^c viselkedése között, míg a többi modell esetében q_0^u szisztematikusan nagyobb q_0^c -nél, tehát a feltételes kovarianciák alkalmazása némileg csökkenti q_0 értékét.

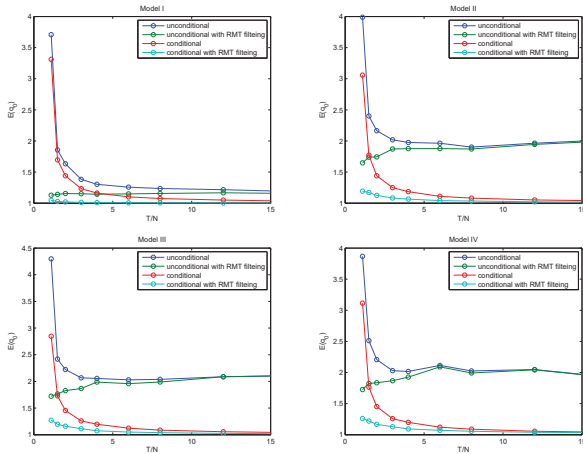
A második paraméter-beállításra az $\alpha + \beta$ összeg nagyobb mint az elsőre, értéke megközelíti az egyet. A GARCH-modellek elméletéből ismert, hogy ennek következtében a szimulált hozamok



8.3. ábra. A zajszűrés hatása $\mathbb{E}[q_0]$ -ra a különböző korrelációs modellek esetében. Az adatgeneráló GARCH paraméterek: $\gamma_i = 0.03$, $\alpha_i = 0.1$, $\beta_i = 0.6$ minden $i = 1, \dots, N$ -re. Az I., II., III. és IV. módszer eredményeit rendre a kék, zöld, piros és világoskék görbe mutatja. (Forrás: [57])

eloszlásának farka vastagabb, a feltételes variancia pedig perzisztensebb lesz. Ennek megfelelően azt várjuk, hogy a feltétel nélküli kovariancia mátrix alapján becsült optimális portfólió mérési hibája nagyobb lesz. Ezt a 8.2. ábra valóban alá is támasztja, hiszen a II., III. és IV. modell esetében q_0^u lényegesen meghaladja q_0^c -t, különösen rövid idősorokra. Amint a minta méretét növeljük, q_0^u 2 körül stabilizálódik és – legalábbis a szimulációkban alkalmazott mintaméret-tartományon belül – ennél tovább már nem csökken (lásd a 8.5. ábrát). Erős GARCH effektus jelenlétében (azaz $\alpha + \beta$ 1-hez közeli értéke mellett) tehát a feltételes kovarianciák alkalmazása kulcsfontosságú a portfólióválasztás során, máskülönben a becsült optimum volatilitása lényegesen meghaladhatja a valódi optimumét.

További fontos eredmény, hogy $\mathbb{E}[q_0^c]$ a vizsgált paraméterértékek mellett igen szorosan követi a klasszikus Markowitz-modellre is érvényes, és a 6. fejezetben replika-módszerrel is levezetett $q_0 = (1 - N/T)^{-1/2}$ összefüggést, ami arra utal, hogy GARCH-folyamatok esetében a portfólió optimalizációs feladat kritikus viselkedése ugyanolyan, mint időben független, normális eloszlású hozamokra. (Ezt persze szigorúan véve csak további, számos különböző modellspecifikációra, és paraméter-beállításra kiterjedő, meglehetősen időigényes numerikus számítások után állíthatnánk nagy biztonsággal.) Más szóval, ha az árfolyamingadozások CCC-GARCH-folyamatot követnek, és a befektetők ezzel tisztában vannak (csak a modellparaméterek pontos értékeivel nem), akkor a becslési hiba miatti átlagos többletkockázat lényegében nem haladja meg azt a mértéket, amit



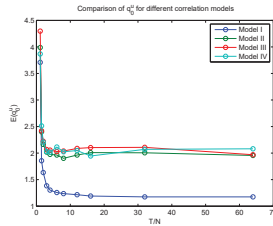
8.4. ábra. A zajszűrés hatása $\mathbb{E}[q_0]$ -ra a különböző korrelációs modellek esetében. Az adatgeneráló GARCH paraméterek: $\gamma_i = 0.03$, $\alpha_i = 0.15$, $\beta_i = 0.8$ minden $i = 1, \dots, N$ -re. Az I., II., III. és IV. módszer eredményeit rendre a kék, zöld, piros és világoskék görbe mutatja. (Forrás: [57])

időben állandó és független, normális eloszlású hozamok esetén tapasztalnánk.

Ennek magyarázata nagy vonalakban a következő. Az egyváltozós GARCH-modellek elméletéből ismeretes, hogy a GARCH paraméterek, és ezzel együtt a ν_t reziduálisok becslési hibája a $T \rightarrow \infty$ limeszben zérushoz tart. Ez a többváltozós CCC-GARCH-folyamatra is igaz, hiszen az N db. változó mindegyike egyváltozós GARCH-folyamatot követ, így „termodinamikai” limeszben (tehát az $N \rightarrow \infty$ és $N/T = \text{const}$ határesetben) a μ_i , α_i , β_i , γ_i , valamint a ν_{it} reziduálisok becslési hibája zérushoz tart. Hiába tudjuk azonban pontosan reprodukálni a ν_{it} véletlen számokat, az ebből számolt minta kovariancia mátrix becslési hibája véges marad. Termodinamikai limeszben tehát a mérési zajhoz csak a feltételes korrelációs becslés hibája ad járulékok.

Mint a 8.3. és a 8.4. ábrán látható, a zajszűrés mind a feltételes, mind pedig a feltétel nélküli kovariancia mátrix alkalmazása esetén (II. és IV. módszer) lényegesen javíthatja a portfólió optimalizáció hatékonyságát. A javulás különösen egyhez közeli T/N értékek esetén szembeszökő. (Nagy T/N -re a mintakovariancia mátrix kevésbé zajos, így a portfólió becslés hibája zajszűrés nélkül is viszonylag alacsony.) A zajszűrés hatására q_0 divergenciája megszűnik, sőt a portfólióválasztási feladat a $T/N > 1$ tartományban is értelmessé válik, elfogadhatóan alacsony q_0 mellett. (Hasonlóan a klasszikus Markowitz-modelhez [16].)

Meglepő lehet – különösen a második GARCH paraméter-beállításra –, hogy a feltétel nélküli kovariancia mátrix alkalmazása esetén a zajszűrés rövidebb idősorokra jobb eredményt ad, mint



8.5. ábra. q_0^u T -től való függésének összehasonlítása különböző korrelációs modellekre. Az adat-generáló GARCH paraméterek: $\gamma_i = 0.03$, $\alpha_i = 0.15$, $\beta_i = 0.8$ minden $i = 1, \dots, N$ -re. A II., III. ($T = 8$ körül) és a IV. modell ($T = 16$ körül) esetében igen lapos lokális minimumhely figyelhető meg. Az I., II., III. és IV. modellhez tartozó eredményeket rendre kék, zöld, piros és világoskék színnel ábrázoltuk. (Forrás: [57])

hosszabbakra, habár intuitíve azt várnánk, hogy T növekedtével q_0 zajszűrés mellett is monoton csökken (mint a feltételes kovariancia mátrix esetében). Ennek a jelenségnek a legkézenfekvőbb magyarázata a következő. A feltétel nélküli kovariancia mátrix alkalmazása téves modellspecifikációra épül (nevezetesen arra a feltételezésre, hogy a fluktuációk függetlenek, és a varianciák és kovarianciák időben állandók). Alacsony T mellett előfordulhat, hogy a variancia perzisztenciája miatt az idősor nem elég hosszú a GARCH hatás megmutatkozásához, így annak figyelmen kívül hagyása relatíve alacsony hibát okoz. A helytelen specifikációból adódó hiba – a minta végessége miatt fellépő statisztikai hibával szemben – T -vel nő, nem pedig csökken. A szimulációk során alkalmazott zajszűrő eljárás azonban alapvetően csak a mintavételi hiba csökkentésére alkalmas. Mindez magyarázatul szolgálhat a 8.5. ábrán látható lokális minimumokra is, amelyek vélhetően abban a pontban jelennek meg, ahol a kétféle hiba kumulatív hatása a legalacsonyabb.

8.3. Empirikus eredmények

A fenti eljárásokat valódi piaci adatokon is teszteltük (az [58] tanulmányban ismertetett elemzéshez hasonló módon, de más adatokkal). Az S&P500 nevű részvényindexben szereplő $N = 406$ db. részvény 1991 és 1996 között megfigyelt, napi árfolyammozgásait használtuk, az idősor hossza $T = 1308$ banki nap. A minimális varianciájú portfólió becslését az I-IV. módszerek mindegyikével elvégeztük.

Az I. és II. módszer esetében az optimális portfóliósúlyokat az első 812 megfigyelés alapján számítottuk (azaz $N/T = 0.5$ mellett), és meghatároztuk, hogy mekkora lett volna a portfólió realizált szórása, ha azt tartottuk volna az elkövetkező 496 banki napon.

A III. és IV. módszer esetében „mozgó ablak” megközelítést alkalmaztunk, azaz a 813. banki naptól kezdődően, minden napra előrejeleztük a feltételes kovariancia mátrixot oly módon, hogy az adott napot megelőző 812 megfigyelésre CCC-GARCH-modellt illesztettünk, és az így becsült

kovariancia mátrix alapján határoztuk meg az optimális portfóliót. A portfólió súlyokat tehát napról napra kiigazítottuk, és ebben az esetben is kiszámoltuk a 496 banki nap alatt realizált szórást. Az eredményeket az alábbi táblázat foglalja össze:

Módszer	Szórás (%)
Kiegyensúlyozott	$6.13 \cdot 10^{-3}$
I	$5.31 \cdot 10^{-3}$
II	$4.32 \cdot 10^{-3}$
III	$4.77 \cdot 10^{-3}$
IV	$3.88 \cdot 10^{-3}$

Az egyes módszerek esetén realizált szórásokat az átlaghozam százalékában adtuk meg, és összehasonlításképpen meghatároztuk, hogy a vizsgált időszakban mekkora lett volna a realizált szórása egy kiegyensúlyozott (azaz minden értékpapírhoz ugyanakkora súlyt rendelő) portfóliónak. Látható, hogy a posteriori a legnagyobb kockázatúnak a kiegyensúlyozott portfólió bizonyult, míg a másik négy módszer teljesítmény szerinti rangsora (a legjobbal kezdve) IV., II., III., és I. Ez az empirikus példa tehát azt mutatja, hogy még a relatíve egyszerű CCC-GARCH-modell illesztésével is jelentősen javíthatjuk a portfólióválasztás hatékonyságát.

9. fejezet

Koherencia axiómák és stabilitás

A korábbi fejezetekben láttuk, hogy különféle kockázati mértékek feletti portfólió optimalizációs problémák zajérzékenysége eltérő lehet. A szórás esetében például az optimális portfólió becslhetőségéhez elegendő, ha a minta T mérete meghaladja az értékpapírok N számát, míg a VaR és ES esetében láttuk, hogy az optimum létezésének a valószínűsége elméletileg mindig kisebb egynél, sőt ez a valószínűség a probléma paramétereitől függően akár igen hosszú idősorokra is közel maradhat nullához.

Ebben az értelemben ez ES vagy VaR jóval instabilabb a szórásnál, vagy például az átlagos abszolút eltérésnél. Ez különösen aggasztó az ES esetében, amely a koherens kockázati mértékek egyik legegyszerűbb és legnépszerűbb példánya. Felmerül a kérdés, hogy ez az instabilitás a kockázati mértékek, és különösképpen a koherens kockázati mértékek mennyire szűk vagy tág körére áll fenn. Amennyiben kiderül, hogy a koherens mértékek általában instabilak, az minden elméleti szépségük ellenére komolyan megkérdőjelezi gyakorlati alkalmazhatóságukat.

Ebben a fejezetben tehát megvizsgáljuk, hogy a kockázati mértékek mely jellemzője milyen összefüggésben áll a mintából történő optimalizáció stabilitásával. Eredményeink egy része [60]-ban már szerepel, de az alábbiakban a kérdést ennél általánosabban fogjuk tárgyalni.

9.1. Hatékony portfóliók létezése teljes információ mellett

9.1.1. A kockázati mértékek axiómái

A 3.2. szakaszban megismertük a koherens kockázati mértékek négy axiómáját, idézzük fel ezeket, és egészítsük ki néhány további jellemzővel. Legyen tehát Ω az értékpapírhozamokat modellező valószínűségi változók halmaza. Defináljuk a $\rho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ kockázati mértékek körében az alábbi tulajdonságokat:

- *Monotonitás:* Ha $X, Y \in \Omega$ és $X \geq Y$, akkor $\rho(X) \leq \rho(Y)$.
- *Szigorú monotonitás:* Ha $X, Y \in \Omega$ és $X > Y$, akkor $\rho(X) < \rho(Y)$.

- *Pozitív homogenitás*: Ha $X \in \Omega$ és $a > 0$, akkor $\rho(aX) = a\rho(X)$.
- *Szubadditivitás*: Ha $X, Y, X + Y \in \Omega$, akkor $\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$.
- *Konvexitás*: Ha $0 < a < 1$ és $X, Y, aX + (1 - a)Y \in \Omega$,
akkor $\rho(aX + (1 - a)Y) \leq a\rho(X) + (1 - a)\rho(Y)$.
- *Transzláció invariancia*: Ha $X \in \Omega$ és $a \in \mathbb{R}$, akkor $\rho(X + a) = \rho(X) - a$.

A monoton, pozitív homogén, szubadditív és transzláció invariáns mértékeket *koherens kockázati mértékeknek* nevezzük. Mivel a szubadditivitásból és a pozitív homogenitásból következik a konvexitás, ezért minden koherens mérték konvex. A szubadditivitási és pozitív homogenitási axiómát gyakran éri kritika amiatt, hogy nagyon nagy befektetési pozíciók mellett (pl. likviditási problémák miatt) érvényüket veszítik. Éppen ezért szokás vizsgálni az úgynevezett *gyengén koherens* mértékeket, amelyekre a koherens mértékekhez hasonlóan megköveteljük a monotonitást és transzláció invarianciát, ám a pozitív homogenitás és szubadditivitás helyett csak a gyengébb konvexitást teljesítik. A koherens mértékek tehát a gyengén koherens mértékek valódi részalmazát képezik.

A szigorú monotonitás teljesülése explicite nem szükséges a koherenciához, ugyanakkor az irodalomban szereplő monoton (és koherens) kockázati mértékekre (pl. VaR, ML, ES, spektrális mértékek) a szigorú monotonitás is fennáll, és mint látni fogjuk, ennek van némi jelentősége.

9.1.2. Az arbitrázs fogalma

Az arbitrázs a pénzügyi elmélet központi fogalma. Hétköznapi nyelven szólva arbitrázsnek nevezünk minden olyan pénzügyi manővert, melynek során a befektető indulótőke nélkül, kockázatmentesen jut biztos nyereséghez. A pénzügyi piacokon ilyen lehetőség ritkán adódik és csak rövid ideig állhat fenn, hiszen az arbitrázslehetőséget kihasználó befektetők ügyleteikkel az árfolyamokat éppen olyan irányba terelik, hogy ez a lehetőség megszűnjön. Mint látni fogjuk, az arbitrázs fogalma a kockázati mértékek stabilitása szempontjából is kulcsfontosságú lesz.

Definiáljuk tehát az arbitrázst céljainknak megfelelően egy kicsit precízebben. Legyen a piacon elérhető N db. értékpapír hozama X_1, X_2, \dots, X_N , és jelölje egy A esemény valószínűségét $\mathbb{P}[A]$. Azt mondjuk, hogy a \mathbf{w} portfólió *arbitrázs*, ha

1. $\sum_{i=1}^N w_i = 0$, és
2. $\sum_{i=1}^N w_i X_i \geq 0$ és $\mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^N w_i X_i \right] > 0$.

Az első feltétel azt mondja ki, hogy a \mathbf{w} portfólió létrehozásához a befektetőnek nincs szüksége kezdőtőkéhez. Ezt úgy is szoktuk mondani, hogy a \mathbf{w} portfólió *önfinanszírozó*. A második feltétel szerint ezen a portfólión biztosan nem veszítünk, de nullánál nagyobb valószínűséggel nyerünk. Könnyen belátható, hogy a második feltétellel ekvivalens lenne, ha $\mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^N w_i X_i \right] > 0$ helyett $\mathbb{P} \left[\sum_{i=1}^N w_i X_i > 0 \right] > 0$ -t követelnénk meg. A fenti definíció szerint tehát az arbitrázs egy olyan kezdőtőkét nem igénylő pénzügyi tranzakció, amellyel csak nyerni lehet, bár azt jelen esetben nem kötvük ki, hogy a nyereség minden esetben garantált legyen, csak azt, hogy pozitív valószínűséggel nyerjünk.

9.1.3. Lehetséges és hatékony portfóliók

Az eddigiekben a költségvetési korlátot teljesítő portfóliókat neveztük lehetséges portfólióknak. Általában azonban a költségvetési korlát mellett (vagy helyett) más mellékfeltételek is elképzelhetők. Tegyük fel, hogy e mellékfeltételek adottak – konkrét alakjuk most nem lényeges – és jelöljük Π -vel azon portfóliók halmazát, amelyek megfelelnek ezeknek a feltételeknek. Általában tehát Π lesz a lehetséges portfóliók halmaza. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy Π zárt halmaz.

Tegyük fel, hogy a kockázatot valamely ρ mértékkel mérjük. Egy \mathbf{w} portfólió kockázata tehát $\rho(\sum_i w_i X_i)$, amit a továbbiakban az egyszerűség kedvéért jelölünk $\rho(\mathbf{w})$ -vel, továbbá \mathbf{w} hozamát jelölje $\mu(\mathbf{w}) = \mathbb{E}[\sum_i w_i X_i]$. A hatékony portfóliókat úgy definiáltuk, mint az adott hozam mellett a legkisebb kockázattal rendelkező portfóliókat. Ha tehát a \mathbf{w} portfólió hatékony, akkor tetszőleges \mathbf{v} portfólió esetén $\rho(\mathbf{w}) \leq \rho(\mathbf{v})$ és $\mu(\mathbf{w}) \geq \mu(\mathbf{v})$. Mivel ez az állítás visszafelé is igaz (bármely ilyen tulajdonságú \mathbf{w} hatékony), ezért ez tekinthető a hatékony portfóliók definíciójának is.

9.1.4. Az optimum létezése monoton mértékek esetén

Az alábbiakban számos fontos állítást fogalmazunk meg és bizonyítunk be a hatékony és minimális kockázatú portfóliók létezésével kapcsolatban. A könnyű áttekinthetőség érdekében ezeket az állításokat megszámozzuk és kiemeljük.

Hatékony portfóliók létezése

Tekintsünk tehát egy N értékpapírból álló piacot, és tegyük fel, hogy a lehetséges portfóliók halmaza Π . Legyen továbbá ρ egy kockázati mérték, és keressük a ρ szerint hatékony portfóliókat.

9.1.1. Állítás. *Amennyiben ρ monoton kockázati mérték, és minden $\mathbf{w} \in \Pi$ portfólióhoz létezik olyan \mathbf{u} arbitrázsporfólió, amelyre $\mathbf{w} + \mathbf{u} \in \Pi$, akkor nem létezik hatékony portfólió.*

Bizonyítás. Válasszunk ki egy tetszőleges $\mathbf{w}^{(0)} \in \Pi$ portfóliót, és lássuk be, hogy nem lehet hatékony. Az állítás előfeltevései szerint létezik \mathbf{u} arbitrázs, amelyre a $\mathbf{w}^{(1)} = \mathbf{w}^{(0)} + \mathbf{u}$ szintén lehetséges portfólió. Definíció szerint $\mu(\mathbf{u}) > 0$, ezért $\mu(\mathbf{w}^{(1)}) > \mu(\mathbf{w}^{(0)})$. Másrészt, szintén az arbitrázs definíciójából adódóan $\sum_i u_i X_i \geq 0$, így $\sum_i w_i^{(1)} X_i \geq \sum_i w_i^{(0)} X_i$, tehát ρ monotonitása miatt $\rho(\mathbf{w}^{(1)}) \leq \rho(\mathbf{w}^{(0)})$. Összefoglalva, $\mathbf{w}^{(0)}$ portfólió hozama kisebb, kockázata pedig legalább akkora, mint $\mathbf{w}^{(1)}$ hozama és kockázata, ezért $\mathbf{w}^{(0)}$ nyilvánvalóan nem lehet hatékony. \square

A fenti állítás pénzügyi értelmezéséhez tegyük fel például, hogy nincs korlátozva a rövidre eladás, és a lehetséges portfóliókat a költségvetési korlát határozza meg, azaz $\Pi = \{\mathbf{w} | \sum_i w_i = 1\}$, amely nyilvánvalóan nem korlátozott. Tegyük fel, hogy \mathbf{u} arbitrázs, tehát komponenseinek összege definíció szerint nulla, így ha \mathbf{w} teljesíti a költségvetési korlátot, akkor $\mathbf{w} + \mathbf{u}$ is, azaz minden $\mathbf{w} \in \Pi$ -re teljesül, hogy $\mathbf{w} + \mathbf{u} \in \Pi$. Így tehát a 9.1.1. Állítás feltételei már egyetlen \mathbf{u} arbitrázslehetőség létezése esetén is teljesülnek. A bizonyítás menetéből világosan látszik, hogy azért nem létezik hatékony portfólió, mert bármely befektetés hozama minden határon túl növelhető anélkül, hogy a kockázat emelkedne.

A Markowitz-modell előfeltevéseinek megfelelő piacon – amely lényegében egyensúlyt, és a piac egészéhez képest elhanyagolható jelentőségű befektetőket feltételez –, az arbitrázs és a hatékony portfóliók létezése intuitíve kölcsönösen kizárják egymást. Ennek az intuíciónak a 9.1.1. Állítás értelmében a monoton mértékek éppen megfelelnek, így első ránézésre a monotonitás kívánatosnak tűnik egy adekvát kockázati mérték esetében.

Ezzel szemben a gyakorlatban a piaci szereplők kereskedési tevékenysége magától értetődő módon befolyásolja az árfolyamokat, mégpedig annál nagyobb mértékben, minél nagyobb tételben vásárol, illetve ad el egy adott szereplő. Mint említettük, egy valódi piacon a befektetők viselkedése visszahat az árfolyamokra, így az arbitrázslehetőségek csak korlátozott mértékben használhatók ki. Ezt a kereskedési stratégiák és árfolyamok közötti – egyébként teljesen természetes – kapcsolatot a kockázatmérés- és kezelés eddigiekben tárgyalt statikus modelljei és módszerei teljes mértékben figyelmen kívül hagyják.

A valóságban tehát az arbitrázslehetőség pillanatnyi létezéséből nem következik, hogy végtelenül nagy nyereségre tehetünk szert a kockázat növelése nélkül. Ezt a tényt a kockázatmodellekhez általában utólag „kézzel” szokás hozzáadni, a portfóliósúlyokra vonatkozó mellékfeltételek formájában. Ennek egyszerű és tipikus esete a rövidre eladás megtiltása, amely a lehetséges portfóliók halmazát $\Pi = \{\mathbf{w} \mid \sum_i w_i = 1 \text{ és minden } i\text{-re } w_i \geq 0\}$ korlátos halmazra szűkíti. Ennek következtében még arbitrázs létezése esetén sem lesz mindig igaz, hogy tetszőleges \mathbf{w} lehetséges portfólióhoz találunk olyan \mathbf{u} arbitrázst, hogy $\mathbf{w} + \mathbf{u}$ szintén lehetséges, hiszen ha \mathbf{w} a Π halmaz határán van, akkor $\mathbf{w} + \mathbf{u}$ már nem feltétlenül lesz Π -ben.

Külső kényszerek hozzáadásával tehát – amelyeket például a tőkepiaci jogszabályok, vagy a pénzintézetek belső kockázatkezelési szabályzatai írhatnak elő – arbitrázslehetőség létezése esetén is garantálhatjuk a hatékony portfóliók létezését, még statikus, egyensúlyi piaci modellben is. Kényszerek bevezetésével azonban az optimális célfüggvényérték triviális módon nem csökkenhet (sőt, tipikusan növekszik), ráadásul az így nyert optimális portfóliósúlyok konkrét értékei gyakran nem az értékpapír-piaci folyamatok tényleges összefüggéseit tükrözik, hanem a szereplőknek a piaci folyamatokról alkotott és a kényszerek által közvetített szubjektív előfeltevéseit. Ennek ellenére a korlátok előírása bevett gyakorlat, és nem csupán a rövidre eladást szokás korlátozni. Ennek fő oka, hogy a kockázatmérés elvi és gyakorlati nehézségei és pontatlansága miatt a tőkepiaci szereplők nem hagyatkozhatnak tisztán matematikai módszerekre, hiszen a megoldás csak annyira használható, amennyire a bemenő adatok és maga a kockázatmérési modell megállja a helyét. A lehetséges megoldások külső kényszerekkel történő alakítása azonban komoly aggályokat is ébreszt, hiszen lehetővé teszi, hogy a végeredményt a befektetők, vagy a szabályalkotók saját érdekeiknek megfelelően előre belekódolják a portfólióválasztási problémába.

Minimális kockázatú portfóliók létezése

Most vizsgáljuk meg azt a kérdést, hogy a kockázatnak mikor létezik abszolút minimuma a lehetséges portfóliók halmazán. Fontos tény, hogy minimális kockázatú portfólió akkor is létezhet, ha egyik portfólió sem hatékony.

Tegyük most fel, hogy a 9.1.1. Állítás feltételei teljesülnek, és így nincs hatékony portfólió.

Tegyük fel továbbá, hogy a ρ kockázatnak létezik ρ_{\min} minimuma a Π lehetséges portfóliók körében, és legyen $\mathbf{w} \in \Pi$ minimális kockázatú, tehát $\rho(\mathbf{w}) = \rho_{\min}$. A $\mathbf{w} + \mathbf{u}$ hozama nyilvánvalóan legalább akkora, mint \mathbf{w} hozama, tehát a monotonitás miatt $\rho_{\min} \geq \rho(\mathbf{w} + \mathbf{u})$. Ez csak úgy lehetséges, ha $\rho_{\min} = \rho(\mathbf{w} + \mathbf{u})$, tehát $\mathbf{w} + \mathbf{u}$ is minimális kockázatú portfólió. Ezzel beláttuk az alábbi állítást:

9.1.2. Állítás. *Amennyiben a 9.1.1. Állítás feltételei fennállnak, és a kockázatnak létezik ρ_{\min} minimuma a lehetséges portfóliók körében, akkor minden minimális kockázatú $\mathbf{w} \in \Pi$ portfólióra igaz, hogy $\rho_{\min} = \rho(\mathbf{w}) = \rho(\mathbf{w} + \mathbf{u})$. Amennyiben tehát létezik minimum, az elfajult lesz.*

Így ha a $\rho(\mathbf{w}) = \rho(\mathbf{w} + \mathbf{u})$ összefüggés teljesülését valamilyen további feltétel kizárja, akkor a kockázatnak a lehetséges portfóliók körében nem lesz minimuma. Ez a helyzet például a szigorúan monoton kockázati mértékekkel (pl. VaR, ML, ES, spektrális mértékek) abban az esetben, ha az \mathbf{u} portfólió hozamára $\sum_i u_i X_i \geq 0$ helyett $\sum_i u_i X_i > 0$ teljesül, hiszen ilyenkor $\rho(\mathbf{w}) > \rho(\mathbf{w} + \mathbf{u})$ definíció szerint fenn kell hogy álljon. A következőre jutottunk tehát:

9.1.3. Állítás. *Amennyiben ρ szigorúan monoton kockázati mérték, és minden $\mathbf{w} \in \Pi$ portfólióra létezik olyan \mathbf{u} arbitrázsporfólió, amelyre $\mathbf{w} + \mathbf{u} \in \Pi$, akkor nem létezik minimális kockázatú portfólió.*

Intuitíve azonban nehezen értelmezhető egy olyan helyzet, amikor a kockázatnak nincs minimuma. Minden pénzügyi szakértő egyetértene abban, hogy a legbiztonságosabb befektetéseket a legfejlettebb országok (pl. USA, egyes EU tagországok) államkötvényei között kell keresniük. Hogy ezek milyen kombinációja a legbiztonságosabb, abban természetesen nincs egyetértés, de azt senki sem vitatja, hogy kell léteznie ilyen kombinációnak. Még abban a ritka és átmeneti esetben is így van ez, ha létezik arbitrázs, hiszen annál alacsonyabb nem lehet a kockázat, ha egyáltalán nincs kockázat. Ennek fényében tehát egy konzisztens kockázati mértéktől elvárható, hogy mindig – még arbitrázs jelenléte mellett is – legyen minimuma, a szigorúan monoton mértékek azonban nem felelnek meg ennek a kritériumnak. (Egy monoton mérték ugyanakkor megfelelhet, ha az arbitrázslehetőségekhez zérus kockázatot rendel, míg minden más befektetéshez zérus vagy pozitív kockázatot.)

9.1.5. Az optimum létezése szubadditív mértékek esetén

Hatékony portfóliók létezése

A 9.1.1-hez hasonló állítást a szubadditív mértékek esetén is megfogalmazhatunk.

9.1.4. Állítás. *Amennyiben ρ szubadditív kockázati mérték, és minden $\mathbf{w} \in \Pi$ -hez létezik \mathbf{u} portfólió, amelyre $\sum_i u_i = 0$, $\rho(\mathbf{u}) \leq 0$ és $\mu(\mathbf{u}) > 0$, továbbá $\mathbf{w} + \mathbf{u} \in \Pi$, akkor nem létezik hatékony portfólió.*

Bizonyítás. Vizsgáljunk meg ismét egy tetszőleges $\mathbf{w}^{(0)} \in \Pi$ portfóliót, és lássuk be, hogy nem hatékony. Mivel $\mu(\mathbf{u}) > 0$, ezért $\mu(\mathbf{w}^{(1)}) > \mu(\mathbf{w}^{(0)})$. Továbbá ρ szubadditivitása, illetve a $\rho(\mathbf{u}) \leq 0$ feltétel miatt

$$\rho(\mathbf{w}^{(1)}) = \rho(\mathbf{w}^{(0)} + \mathbf{u}) \leq \rho(\mathbf{w}^{(0)}) + \rho(\mathbf{u}) \leq \rho(\mathbf{w}^{(0)}). \quad (9.1)$$

A $\mathbf{w}^{(1)}$ portfólió tehát nagyobb várható hozamú, ugyanakkor legfeljebb akkora kockázatú, mint $\mathbf{w}^{(0)}$, így nem hatékony. \square

Monoton illetve szubadditív mértékek esetén tehát a hatékony portfóliók nem létezésének a feltételei hasonlóan tűnnek, csak az előbbi esetben a $\sum_i u_i X_i \geq 0$ -nak, míg az utóbbi esetben $\rho(\mathbf{w}) \leq 0$ -nak kell teljesülnie. Könnyen belátható, hogy koherens mértékekre az előbbiből következik az utóbbi, ilyen értelemben a $\rho(\mathbf{w}) \leq 0$ feltétel enyhébb. Ennek ellenére, mint látni fogjuk, a két feltétel között a kockázatmérés lényegét érintő, tartalmi eltérés van.

A fenti állítás tehát azt mondja ki, hogy ha a kockázatot egy szubadditív mértékkel mérjük, és létezik olyan befektetési stratégia, amely – az adott kockázati mérték szerint – negatív kockázat mellett pozitív várható hozamot tud biztosítani, akkor nincs hatékony portfólió, mert a negatív kockázatú portfóliót bármely pozícióhoz hozzáadva egyszerre tudjuk csökkenteni a kockázatot és növelni a hozamot. Természetesen most is igaz, hogy amennyiben a lehetséges portfóliók Π halmaza korlátos (mert például a rövidre eladás tilos), akkor mindig lesz hatékony portfólió, ha máshol nem, hát Π határán.

Igen fontos tény, hogy az állítás feltételeknek megfelelő \mathbf{u} portfólióról nem tesszük fel, hogy arbitrázs. Normális eloszlású hozamok esetében például bármely portfólió hozama szintén normális eloszlású, tehát a veszteségek valószínűsége mindig pozitív. Ennek ellenére például az ES (amely koherens, tehát szubadditív) lehet negatív, ha elegendően nagy a várható érteke ahhoz, hogy pl. az 5%-nyi legalacsonyabb hozam átlaga még mindig nagyobb legyen, mint zérus. Ez azonban nem jelenti azt, hogy az adott befektetésen ne veszíthetnénk, a szó köznapi értelmében tehát van kockázata – még ha ez a kockázat nem is túl magas. A fenti állítás értelmében azonban szubadditív ρ mértékek esetén egy negatív kockázatú, pozitív várható hozamú önfinszírozó befektetés formálisan arbitrázsként viselkedik, arra ösztönözve a befektetőt, hogy az adott befektetésből minden határon túl növelje a pozícióját, mert így a ρ mért kockázat minden határon túl csökkenthető (miközben a várható hozam nő). Így azonban sajnos a potenciális veszteség – és ezzel a hétköznapi értelemben vett kockázat – minden határon túl nő.

A fentiekből következik, hogy a negatív kockázat pénzügyileg nem értelmes. Józan ésszel belegondolva ez persze evidens: egy dolog vagy kockázatos vagy nem. Az ésszerűség azt diktálja, hogy zérus kockázattal bír minden olyan befektetés, amelynek a hozama nem véletlenszerű, bármilyen más befektetés csak ugyanilyen kockázatú lehet, vagy kockázatosabb.¹ Igen nehéz azonban olyan stratégiát elképzelni, amely még a garantált hozamú befektetésnél is kevésbé kockázatos.

Minimális kockázatú portfóliók létezése

A monoton mértékek minimumára vonatkozó gondolatmenet analógiájára könnyen belátható a 9.1.2. Állítás szubadditív mértékekre vonatkozó változata.

¹Sokszor pontosan azokat a befektetéseket tekintjük zérus kockázatúnak, amelyek hozama biztos (ezt a megközelítést tükrözi pl. a szórás mint kockázati mérték). Értelmes lehet azonban zérus kockázatúnak tekinteni olyan befektetéseket is, amelyek kimenetele sohasem lehet rosszabb, mint valamilyen garantált hozamú befektetés. A kockázatnak ez a megközelítése azért előnyös, mert az arbitrázslehetőségekhez automatikusan zérus kockázatot rendel.

9.1.5. Állítás. *Amennyiben a 9.1.4. Állítás feltételei fennállnak, és a kockázatnak létezik ρ_{\min} minimuma a lehetséges portfóliók körében, akkor minden minimális kockázatú $\mathbf{w} \in \Pi$ portfólióra igaz, hogy $\rho_{\min} = \rho(\mathbf{w}) = \rho(\mathbf{w} + \mathbf{u})$. Amennyiben tehát létezik minimum, az elfajult lesz, továbbá a feltételeknek megfelelő bármilyen \mathbf{u} portfólió kockázata $\rho(\mathbf{u}) = 0$ kell, hogy legyen.*

A minimum létezését tehát eleve kizárja, ha az \mathbf{u} kockázata negatív, ami számos koherens mérték (pl. ML, ES, spektrális mértékek) esetén könnyen előfordulhat, még akkor is, ha \mathbf{u} nem arbitrázs. Mivel a minimális kockázatú portfólió létezése általában elvárható (különösen arbitrázsmentes piacon), a fenti eredmény újabb példája annak, hogy milyen ellentmondásokra jutunk akkor, ha nem zárjuk ki a negatív kockázat lehetőségét.

9.1.6. Gyakorlati példák

A centrális momentum jellegű mértékek

Vizsgáljuk meg hogy a fent megfogalmazott állítások érvényesek-e az olyan centrális momentum-szerű mértékek, mint a szórás, abszolút eltérés és a (3.2) értelemben vett (várható érték levonása nélküli) szemivariancia. Könnyen belátható, hogy a 9.1.1. Állítás nem áll fent, mivel a felsorolt mértékek egyike sem monoton.

A szóban forgó mértékekről belátható, hogy szubadditívak, tehát a 9.1.4. Állítás feltételei speciális esetben teljesülhetnek. Mivel a centrális momentumok nemnegatívok, ezért ez csak úgy lehetséges, ha a feltételekben szereplő \mathbf{u} portfólió kockázata (azaz szórása, abszolút eltérése vagy szemivarianciája) zérus, más szóval \mathbf{u} hozama biztos és pozitív, azaz \mathbf{u} arbitrázs. Minimális kockázatú portfólió azonban mindig létezik, hiszen a kockázat alulról korlátos, és a kockázati mérték a portfólió súlyok konvex függvénye.

Röviden összefoglalva, ha centrális momentumokkal mérjük a kockázatot, akkor egy garantált (nulla szórású) nyereséget biztosító arbitrázs létezése esetén nincs hatékony portfólió. Ezt egyébként egy adekvát kockázati mértéktől el is várjuk, az elvi probléma csupán az, hogy egy arbitrázsügylet nyeresége véges szórású is lehet, ilyen esetben tehát pozitív kockázatot rendelünk olyan pénzügyi termékhez, amely intuitíve kockázatmentes. Ennél azonban nagyobb jelentőségű az a korábban már részletesen taglalt probléma, hogy tartós és korlátlan arbitrázs a valóságban nem létezik.

A kockázatotott érték

A kockázatotott értékre mind a monotonitás, mind a szigorú monotonitás teljesül, így a 9.1.4. szakasz összes állítása érvényes rá. Arbitrázs létezése esetén a VaR szerint tehát nincsenek sem hatékony, sem minimális kockázatú portfóliók. A VaR ugyanakkor általában nem szubadditív, tehát a 9.1.5. szakasz eredményei nem alkalmazhatók automatikusan.

Egyes fontos speciális esetekben, például normális eloszlású hozamok esetén a fentivel éppen ellentétes a helyzet. Mivel többváltozós normális eloszlású hozamok esetén nincs arbitrázs (a veszteségek valószínűsége mindig pozitív), ezért a 9.1.1., 9.1.2. és 9.1.3. Állítás feltételei a VaR monotonitása ellenére sohasem teljesülnek. Normális eloszlás mellett ugyanakkor a VaR szubadditívvá válik, ilyen esetekben tehát alkalmazhatjuk a 9.1.4. és a 9.1.5. Állítást.

A 7.2. szakaszban meghatároztuk a VaR-ban (és az ES-ben) hatékony portfóliók halmazát, és azt találtuk, hogy a hatékony, illetve minimális kockázatú portfóliók létezése nem automatikus, hanem a (7.11) egyenlőség teljesülésének függvénye. Most már ennek a mélyebb okát is értjük: bizonyos esetekben a hozamok kovarianciái és várható értékei úgy alakulnak, hogy bizonyos önfinszírozó portfóliók VaR-ja, illetve ES-ja negatív lesz, és ilyenkor a portfólióválasztási problémának nem lesz megoldása. A (7.11) feltétel tehát azt mutatja meg, hogy a 9.1.4. Állítás feltételei az eloszlás milyen paramétereire, és milyen konfidenciaszintek mellett teljesülnek.

A koherens mértékek esete

A koherencia axiómák miatt a koherens kockázati mértékekre a 9.1.3. kivételével a fejezet összes eddigi állítása érvényes. Az irodalomban általában fellelhető koherens mértékek, így például az Expected Shortfall, a Maximal Loss és a spektrális mértékek azonban szigorúan monotonok is, így ezekre a 9.1.3. Állítás is fennáll.

Arbitrázslehetőség létezése esetén tehát a koherens mértékek szerint nincs hatékony portfólió. Amint azt korábban részletesen kifejtettük, tartósan fennmaradó arbitrázs mellett ez a viselkedés megfelel a pénzügyi logikának, szemben a reális piacokkal, ahol csak átmenetileg léphet fel arbitrázslehetőség. Ez azonban inkább a leegyszerűsített piaci modellt, semmint a kockázati mérték hibája.

Akkor sem létezik azonban hatékony portfólió, ha kezdőtőke nélkül kialakíthatunk olyan portfóliót, amelyre ρ kockázati mértékünk negatív értéket ad. A koherens mértékek e jellemzője azonban pénzügyileg már nem nevezhető észszerűnek, hiszen abból, hogy ρ negatív, még nem következik, hogy a veszteség valószínűsége nulla, így a koherens mértékek olyan portfólióválasztási stratégiára ösztönözhetnek, amelyen ugyan kis valószínűséggel, de akár sokat is bukhatunk. Az irodalomban javasolt koherens mértékek esetében továbbá a hatékony és minimális kockázatú portfóliók pontosan ugyanakkor léteznek, illetve nem léteznek, holott a kockázat globális minimumának intuitív módon mindig léteznie kellene.

9.2. Hatékony portfóliók létezése becslt kockázat esetén

A fejezet eddigi részében a koherencia axiómák és a portfólió optimalizáció viszonyának tanulmányozása során feltételeztük, hogy a befektetések kockázatát pontosan ismerjük. Most azonban a korábbi fejezetek gyakorlatához hasonlóan ismét feltesszük, hogy a kockázatot nem ismerjük pontosan, hanem egy múltbeli mintából becsljük. A mintánkat továbbra is egy $N \times T$ -s $\{x_{it}\}$ mátrix jelöli, ahol N az értékpapírok, T pedig a megfigyelések száma. A továbbiakban tehát azt fogjuk megvizsgálni, hogy a becslt kockázat szerinti hatékony illetve minimális kockázatú portfóliók milyen esetben léteznek, illetve nem léteznek.

9.2.1. A hatékony portfóliók becslése

Tegyük fel, hogy a kockázatot a $\rho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ kockázati mértékkel jellemezzük, ekkor tehát egy $X \in \Omega$ hozamú befektetés valódi kockázata $\rho(X)$. A kockázatot azonban X eloszlása ismeretének hiányában nem tudjuk pontosan, de ha rendelkezésünkre áll egy T db. megfigyelésből álló minta, ahol a t . időszaki realizált hozam x_t , akkor X kockázatára készíthetünk egy becslést. Jelölje ezt a becsült kockázatot $\hat{\rho}(X|\{x_t\})$.

Ehhez hasonló módon, egy N értékpapírból álló piacon egy \mathbf{w} portfólió valódi $\rho(\mathbf{w})$ kockázatát nem ismerjük, de ha rendelkezésünkre áll egy T hosszúságú, x_{it} realizált hozamokat tartalmazó idősor, akkor meghatározhatjuk \mathbf{w} becsült kockázatát: $\hat{\rho}(\sum_i w_i X_i|\{x_{it}\})$, amit az egyszerűség kedvéért $\hat{\rho}(\mathbf{w}|\{x_{it}\})$ -vel is jelölünk.

A hatékony portfóliók véges mintán történő meghatározásához a várható hozamokat a szokásos módon, a mintaátlaggal becsüljük: $\hat{\mu}(\mathbf{w}|\{x_{it}\}) = \frac{1}{T} \sum_t w_i x_{it}$. A lehetséges portfóliók Π halmazát a korábbiaknak megfelelően értelmezve azt mondjuk tehát, hogy a $\mathbf{w} \in \Pi$ portfólió a $\hat{\rho}$ kockázatbecslő függvény szerint hatékony az $\{x_{it}\}$ mintán, ha bármely $\mathbf{v} \in \Pi$ portfólióra $\hat{\rho}(\mathbf{w}|\{x_{it}\}) \leq \hat{\rho}(\mathbf{v}|\{x_{it}\})$ és $\hat{\mu}(\mathbf{w}|\{x_{it}\}) \geq \hat{\mu}(\mathbf{v}|\{x_{it}\})$. A továbbiakban a 9.2. alfejezetben a „ $\hat{\rho}$ a $\{x_{it}\}$ mintán hatékony portfólió” helyett általában egyszerűen csak hatékony portfóliót mondunk, amennyiben ez nem értelemszavaró.

9.2.2. A látszólagos arbitrázs

Azt mondjuk, hogy a \mathbf{w} portfólió *látszólagos arbitrázs* vagy *arbitrázs* *látszik/tűnik* az $\{x_{it}\}$ mintán, ha

1. $\sum_{i=1}^N w_i = 0$, és
2. minden $t = 1, 2, \dots, T$ -re $\sum_{i=1}^N w_i x_{it} \geq 0$ és létezik olyan $1 \leq t \leq T$, amelyre $\sum_{i=1}^N w_i x_{it} > 0$.

A 2. feltétel ekvivalens megfogalmazása lenne, ha $\sum_{i=1}^N w_i x_{it} \geq 0$ mellett azt követelnénk meg, hogy a portfólióhozam mintaátlagja legyen nagyobb, mint zérus. A látszólagos arbitrázs elnevezést tehát éppen azért alkalmaztuk, mert a fenti definíciónak megfelelő \mathbf{w} portfólió az $\{x_{it}\}$ minta alapján arbitrázs *látszik*. Mint látni fogjuk, alapvető jelentőségű az a szinte magától értetődő tény, hogy egy portfólió egy véges mintán akkor is arbitrázs *tűnik* (mégpedig pozitív valószínűséggel), ha valójában nem az.

9.2.3. A becsült optimum létezése monoton mértékek esetén

Tegyük fel, hogy befektetéseink kockázatát a ρ mértékkel mérjük, amelyet egy $\hat{\rho}$ függvény segítségével becslünk. A kockázati mértékek (szigorú) monotonitáshoz hasonlóan, a kockázatbecslő függvényekre is értelmezhetjük a (szigorú) monotonitást. Tegyük fel, hogy két különböző értékpapír $X \in \Omega$ és $Y \in \Omega$ hozamát megfigyeltük T egymást követő időszakban, és jelölje rendre x_t és y_t az X és Y hozamok t . időszakban megfigyelt értékét. Azt mondjuk, hogy a $\hat{\rho}$ kockázatbecslő függvény

- *monoton*, ha abból, hogy minden $t = 1, 2, \dots, T$ -re $x_t \leq y_t$, következik $\hat{\rho}(X|\{x_t\}) \geq \hat{\rho}(Y|\{y_t\})$, illetve
- *szigorúan monoton*, ha abból, hogy minden $t = 1, 2, \dots, T$ -re $x_t < y_t$, következik $\hat{\rho}(X|\{x_t\}) > \hat{\rho}(Y|\{y_t\})$.

Természetesen egy (szigorúan) monoton mérték becslőfüggvénye nem szükségképpen (szigorúan) monoton. Amennyiben azonban a monotonitás teljesül, akkor a becslő minimális kockázatu, illetve hatékony portfóliók létezésére beláthatjuk a 9.1.1. Állítás megfelelőjét:

9.2.1. Állítás. *Legyen a lehetséges portfóliók halmaza Π , kockázatbecslő függvényünk $\hat{\rho}$ és tekintsünk egy $\{x_{it}\}$ mintát. Amennyiben $\hat{\rho}$ monoton kockázatbecslő függvény, és minden $\mathbf{w} \in \Pi$ portfólióra létezik olyan \mathbf{u} látszólagos arbitrázportfólió, amelyre $\mathbf{w} + \mathbf{u} \in \Pi$, akkor az $\{x_{it}\}$ mintán nem létezik $\hat{\rho}$ szerint hatékony portfólió.*

Bizonyítás. A 9.1.1. Állítás bizonyításához teljesen hasonló módon járunk el. Vegyünk egy tetszőleges $\mathbf{w}^{(0)} \in \Pi$ portfóliót, és tekintsük $\mathbf{w}^{(1)} = \mathbf{w}^{(0)} + \mathbf{u}$ -t, amely a feltevések szerint szintén benne van Π -ben. Mivel \mathbf{u} látszólagos arbitrázs, ezért egyrészt $\hat{\mu}(\mathbf{w}^{(1)}|\{x_{it}\}) > \hat{\mu}(\mathbf{w}^{(0)}|\{x_{it}\})$, másrészt $\sum_i w_i^{(1)} x_{it} \geq \sum_i w_i^{(0)} x_{it}$, tehát a monotonitás miatt $\hat{\rho}(\mathbf{w}^{(1)}|\{x_{it}\}) \leq \hat{\rho}(\mathbf{w}^{(0)}|\{x_{it}\})$, így $\mathbf{w}^{(0)}$ nem hatékony. \square

Amennyiben tehát a becsléshez használt minta alapján látszólag létezik arbitrázslehetőség, a $\hat{\rho}$ monoton becslőfüggvény szerint nem léteznek hatékony portfóliók. Mivel látszólagos arbitrázs abban az esetben is megjelenhet, ha nincs valódi arbitrázslehetőség, a $\hat{\rho}$ szerinti becslő hatékony portfóliók akkor sem biztos, hogy léteznek, ha az eredeti ρ mérték szerint vannak hatékony portfóliók.

A látszólagos arbitrázs létezése az adott mintától függ, tehát véletlen esemény. Amennyiben ennek az eseménynek a valószínűsége számottevő – ami, mint látni fogjuk, akkor is bekövetkezhet, ha valójában nincs arbitrázs –, a hatékony portfóliók mintából történő becslése igen instabil lesz, hiszen előfordulhat, hogy az optimális portfóliókat még véges hibával sem tudjuk megbecsülni.

A minimális kockázatu portfóliók létezésére vonatkozó 9.1.2. és 9.1.3. Állítások a fentiek mintájára értelemszerűen átfogalmazhatók és beláthatók a véges mintából történő kockázatbecslés esetére. A 9.2.1. Állítás feltételeinek teljesülése esetén tehát a $\hat{\rho}$ -nak létezik minimuma az $\{x_{it}\}$ mintán, akkor az elfajult lesz és minden \mathbf{w} minimális kockázatu portfólióra $\mathbf{w} + \mathbf{u}$ is minimális kockázatu lesz. Továbbá, ha $\hat{\rho}$ szigorúan monoton, és \mathbf{u} -ra $\sum_i u_i x_{it} > 0$ is teljesül, akkor $\hat{\rho}$ -nak nincs minimuma. A minimális kockázatu portfólió becslése tehát a hatékony portfóliókéhoz hasonlóan igen instabil lehet, különösen szigorúan monoton becslőfüggvények esetén.

Mielőtt az itt tárgyalt instabilitást konkrét példákon keresztül illusztrálnánk, vizsgáljuk meg a szubadditivitás lehetséges következményeit is.

9.2.4. A becslő optimum létezése szubadditív mértékek esetén

Legyen $\{x_t\}$ és $\{y_t\}$ két befektetés X és Y hozamának idősora. Azt mondjuk, hogy a $\hat{\rho}$ becslőfüggvény *szubadditív*, ha tetszőleges $\{x_t\}$ és $\{y_t\}$ realizációkra $\hat{\rho}(X + Y|\{x_t\}, \{y_t\}) \leq \hat{\rho}(X|\{x_t\}) +$

$\hat{\rho}(Y|\{y_t\})$. A 9.1.4. Állítás becslőfüggvényekre vonatkozó változata tehát:

9.2.2. Állítás. Legyen a lehetséges portfóliók halmaza Π , kockázatbecslő függvényünk $\hat{\rho}$ és tekintsünk egy $\{x_{it}\}$ mintát. Amennyiben $\hat{\rho}$ szubadditív, és minden $\mathbf{w} \in \Pi$ -re létezik \mathbf{u} portfólió, amelyre $\sum_i u_i = 0$, $\hat{\rho}(\mathbf{u}|\{x_{it}\}) \leq 0$ és $\hat{\mu}(\mathbf{u}|\{x_{it}\}) > 0$, továbbá $\mathbf{w} + \mathbf{u} \in \Pi$, akkor az $\{x_{it}\}$ mintán nem létezik $\hat{\rho}$ szerint hatékony portfólió.

Bizonyítás. Tekintsünk ismét egy $\mathbf{w}^{(0)}$ lehetséges portfóliót, illetve a szintén lehetséges $\mathbf{w}^{(1)} = \mathbf{w}^{(0)} + \mathbf{u}$ -t. Világos, hogy $\mathbf{w}^{(0)}$ becslült várható hozama nem kisebb, mint $\mathbf{w}^{(1)}$ becslült várható hozama, továbbá $\hat{\rho}$ szubadditivitása és a $\hat{\rho}(\mathbf{u}|\{x_{it}\}) \leq 0$ feltétel miatt

$$\begin{aligned} \hat{\rho}(\mathbf{w}^{(1)}|\{x_{it}\}) &= \hat{\rho}(\mathbf{w}^{(0)} + \mathbf{u}|\{x_{it}\}) \leq \\ &\leq \hat{\rho}(\mathbf{w}^{(0)}|\{x_{it}\}) + \hat{\rho}(\mathbf{u}|\{x_{it}\}) \leq \hat{\rho}(\mathbf{w}^{(0)}|\{x_{it}\}). \end{aligned} \quad (9.2)$$

A $\mathbf{w}^{(0)}$ portfólió tehát nem lehet hatékony. \square

Az eddigiek mintájára továbbá az is belátható, hogy amennyiben a fenti állítás feltételei teljesülnek, akkor csak úgy létezhet minimális kockázatú portfólió, ha $\hat{\rho}(\mathbf{u}|\{x_{it}\}) = 0$, ha tehát \mathbf{u} kockázata lehet negatív, akkor előfordulhat, hogy nincs minimum.

Újra elmondható, hogy a fenti állítások feltételei véges valószínűséggel akkor is teljesülhetnek, ha az eredeti ρ mérték szerint léteznek hatékony portfóliók. Így tehát a negatív kockázatú befektetések lehetősége a szubadditivitással együtt mintából történő becslés esetén egy újabb instabilitás forrása.

9.2.5. Gyakorlati példák

Szórás és MAD

A szórásnégyzet, illetve átlagos abszolút eltérés torzítatlan becslését rendre a

$$\sigma^2(\mathbf{w}|\{x_{it}\}) = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T \left(\sum_{i=1}^N w_i x_{it} - \hat{\mu}(\mathbf{w}|\{x_{it}\}) \right)^2, \quad (9.3)$$

$$\widehat{MAD}(\mathbf{w}|\{x_{it}\}) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left| \sum_{i=1}^N w_i x_{it} - \hat{\mu}(\mathbf{w}|\{x_{it}\}) \right| \quad (9.4)$$

képletek adják meg. Könnyen belátható, hogy ezek a becslőfüggvények nem monotonok, de szubadditívak, ugyanakkor nemnegatívok. A 9.2.1. Állítás tehát ezekben az esetekben nem érvényes. A 9.2.2. Állítás feltételei egyetlen esetben teljesülhetnek, ha van olyan \mathbf{u} látszólagos arbitrázs, amelynek az adott mintán belül a megfigyelt hozama mindig pontosan ugyanaz a pozitív szám. Ennek az esélye azonban realizitikus hozameloszlást feltételezve gyakorlatilag nulla, kivéve ha \mathbf{u} biztos (zérus szórású) nyereséget biztosít, valódi arbitrázs. Ilyen esetben viszont el is várjuk, hogy ne létezzenek hatékony portfóliók. A becslült szórás és MAD stabilitásának szempontjából tehát a szóban forgó két állítás nem releváns. Ez a következtetés teljesen összhangban van a szórás és MAD mint kockázati mérték zajérzékenységét normális eloszlás mellett vizsgáló tanulmányok eredményeivel

[16, 28]: amennyiben a megfigyelések száma legalább akkora, mint az értékpapírok száma, a becscült optimum mindig létezik (feltéve, hogy a valódi kovariancia mátrix nem szinguláris).

Maximal Loss

Kondor, Pafka és Nagy [28]-ban megvizsgálták a Maximal Loss, és a historikus módszerrel becscült Expected Shortfall zajérzékenységet is, ennek eredményeit a 4.2.2. szakaszban már áttekintettük. Azt láttuk, hogy amennyiben a mintából becscült ML-t, illetve ES-t próbáljuk minimalizálni, az optimum létezése nem minden mintán garantált, annak ellenére, hogy a valódi eloszlás szerint van optimális portfólió. Habár a szóban forgó instabilitás részletes, kvantitatív jellemzésére sor került egyrészt Monte Carlo szimulációk [28] másrészt a replika-módszer [53] segítségével, mindeztidáig a egyszerű mélyebb oka nem volt világos. Mivel azonban a ML és a historikus ES könnyen beláthatóan monoton és szubadditív kockázatbecslő függvények, így a jelen fejezetben tárgyalt állítások fényt derítenek a mintából történő portfólió optimalizáció instabilitásának pontos pénzügyi magyarázatára.

Vizsgáljuk meg elsőként a Maximal Loss esetét. A 4.2.2. szakaszban láttuk, hogy az $N = 2$ és $T = 2$ esetben pontosan akkor nem létezik optimális portfólió, ha az x_{it} megfigyelésekre vagy $x_{11} > x_{21}$ és $x_{12} > x_{22}$, vagy pedig $x_{11} < x_{21}$ és $x_{12} < x_{22}$ teljesül. Könnyen belátható, hogy az első esetben az $\mathbf{u} = (1, -1)$ míg a második esetben $\mathbf{u} = (-1, 1)$ látszólagos arbitrázportfólió lesz, így a 9.2.1. Állítás (illetve annak minimális kockázatú portfóliókra vonatkozó változata) értelmében nem létezik optimális portfólió.

Általános esetben az ML minimalizációja geometriailag megfelel egy hipersíkok által meghatározott felület legmélyebben fekvő pontjának. A síkok pontos helyzete véletlenszerű – mintáról mintára ingadozik –, így véges valószínűséggel előfordulhat, hogy nem határoznak meg legmélyebb pontot (hasonlóan a 4.2. ábra jobb oldali grafikonjához). Ennek a geometriai képnek a pénzügyi értelmezését tehát éppen a 9.2.1. Állítás adja: az arbitrázportfólió létezésekor a szóban forgó síkok nem „zárnak össze”, azaz nem határoznak meg minimumot.

Az ML esetben továbbá a $\hat{\rho}(\mathbf{w}|\{x_{it}\}) \leq 0$ és a minden t -re $\sum_i w_i x_{it} \geq 0$ feltételek definíció szerint ekvivalensek, így a 9.2.1. és a 9.2.2. Állítás feltételei pontosan ugyanakkor teljesülnek. Sőt, amennyiben a költségvetési korlát az egyetlen kikötés, akkor még ennél is többet mondhatunk:

9.2.3. Állítás. *Amennyiben $\Pi = \{\mathbf{w} | \sum_i w_i = 1\}$, az $\{x_{it}\}$ mintán a Maximal Loss szerint pontosan akkor nem léteznek hatékony portfóliók, ha létezik látszólagos arbitrázs.*

Bizonyítás. A 9.2.1. Állítás értelmében az arbitrázportfólió létezése kizárja a hatékony portfóliók létezését, tehát csak az ellenkező irányt kell belátnunk. Tegyük fel tehát, hogy nem létezik hatékony portfólió, és lássuk be, hogy létezik arbitrázs. Könnyen belátható, hogy amennyiben nem létezik hatékony portfólió, minden u és v valós számhoz létezik $\mathbf{w}^{u,v}$ portfólió, hogy $\hat{\rho}(\mathbf{w}^{u,v}|\{x_{it}\}) \leq u$ és $\hat{\mu}(\mathbf{w}^{u,v}|\{x_{it}\}) > v$. Jelölje k és s azt a két indexeket amelyre $x_{ks} = \max_{it} \{x_{it}\}$, és válasszuk meg u -t és v -t úgy, hogy $u \leq -x_{ks}$, illetve $v > \frac{1}{T} \sum_t x_{kt}$, és tekintsük az ennek megfelelő $\mathbf{w}^{u,v}$ portfóliót. Vezessük be az \mathbf{u} portfóliót úgy hogy $u_i = w_i^{u,v} - \delta_{ik}$. Ekkor \mathbf{u} -ra teljesülnek a következők:

- $\sum_i u_i = 0$, hiszen $\sum_i w_i^{u,v} = \sum_i \delta_{ik} = 1$.

- $\hat{\rho}(\mathbf{w}^{u,v}|\{x_{it}\}) = -\min_t (\sum_i w_i^{u,v} x_{it}) \leq u \leq -x_{ks}$, amiből következik, hogy minden t -re $\sum_i w_i^{u,v} x_{it} \geq x_{ks}$, azaz $\sum_i u_i x_{it} \geq 0$.
- $\hat{\mu}(\mathbf{w}^{u,v}|\{x_{it}\}) = \frac{1}{T} \sum_{i,t} w_i^{u,v} x_{it} > v > \frac{1}{T} \sum_i x_{kt}$, amiből következik, hogy $\hat{\mu}(\mathbf{u}) = \frac{1}{T} \sum_{i,t} u_i x_{it} > 0$.

A fenti három megállapításból definíció szerint következik, hogy \mathbf{u} látszólagos arbitrázs, továbbá minden $\mathbf{w} \in \Pi$ -re $\sum_i (w_i + u_i) = \sum_i w_i = 1$, tehát $\mathbf{w} + \mathbf{u} \in \Pi$. Ezzel az állítást beláttuk. \square

Mivel a Maximal Loss szigorúan monoton mérték, ezért a fenti állítás hatékony portfóliók helyett a minimális kockázatú portfóliókra, azaz a minimax problémára is igaz lesz. A 4.2.2. szakaszban láttuk, hogy az optimum létezése a véletlen mintától függ, aminek a p valószínűsége a hozamok eloszlása és a mintaméret alapján elvileg meghatározható. A 9.2.3. Állítás miatt tehát $1-p$ megegyezik annak valószínűségével, hogy egy adott mintán létezik látszólagos arbitrázs. Standard normális eloszlás esetén például p -t a (4.17) egyenlet adja meg, amely az $N/T = \text{const}$ és $N \rightarrow \infty$ (termodinamikai) limeszben $T > 2N$ -re 1-hez, míg $T < 2N$ -re 0-hoz tart, $N/T = 1/2$ -nél fellép egy kritikus pont.

Expected Shortfall

A ML a historikus módszerrel becsült ES $\alpha = 1$ -hez tartozó speciális esete. A 4.2.2. szakaszban láttuk, hogy a historikus ES esetében az optimum létezésének a valószínűsége az N piacméret és a T mintaméret mellett az α konfidenciaszinttől is függ. Termodinamikai limeszben az optimum létezésének valószínűsége a minimax problémához hasonlóan vagy 1-hez, vagy 0-hoz tart, és az ennek megfelelő két fázist az N/T - α síkon a 4.3. ábrán szemléltettük. A két fázist elválasztó kritikus pontok görbéjén jól látható, hogy $\alpha = 1$ körül, ahol az ES optimalizációja közelít a minimax problémához, a kritikus pont $N/T = 1/2$ közelében lesz. Amint α -t csökkentjük, N/T kritikus értéke is csökkenni kezd, tehát az értékpapírok számához viszonyítva egyre hosszabb időssorra van szükségünk ahhoz, hogy garantáljuk az optimum létezését.

A 9.2.1., 9.2.2. és 9.2.3. Állítás segítségével magyarázatot adhatunk a fenti jelenségre, hiszen az Expected Shortfall historikus becslése monoton és szubadditív, továbbá speciális esetként magában foglalja a Maximal Loss-t is. Mivel a becsült ES akkor is lehet negatív, ha nem minden megfigyelt hozam pozitív, ezért a 9.2.2. Állítás miatt a látszólagos arbitrázs hiánya nem garantálja az optimum létezését. Más szóval, ha egy adott mintán az ES szerinti létezik optimum, akkor az ML szerint is, fordítva azonban ez nem igaz, kivéve, ha az ES konfidenciaszintje 1. Emiatt tehát $\alpha = 1$ -re az ES és az ML kritikus pontja megegyezik, $\alpha < 1$ esetében azonban az ES szerinti optimum a minták nagyobb halmazára nem létezik, mint az ML szerinti optimum, így az ES kritikus pontja fokozatosan eltávolodik az ML kritikus pontjától ($1/2$ -től). Mivel a konfidenciaszint növelésével az ES értéke csökken, ezért minél nagyobb α , annál nagyobb valószínűséggel lesz egy adott portfóliónak a becsült kockázata negatív, azaz annál nagyobb valószínűséggel fognak teljesülni a 9.2.2. Állítás feltételei. Ez magyarázza, hogy a konfidenciaszint csökkenése miért vezet a kritikus N/T érték csökkenéséhez, azaz az instabilitás növekedéséhez.

A 7. fejezetben az ES-t (valamint a VaR-t és a szemivarianciát) nem historikus, hanem parametrikus módszerrel becsültük. Könnyen belátható, hogy normális eloszlás illesztése esetén nem léphet fel látszólagos arbitrázs, hiszen a normális eloszlás mindig véges valószínűséget rendel a veszteségekhez, így a 9.2.1. Állítás feltételei nem teljesülnek. Továbbra is érvényes ugyanakkor a 9.2.2. Állítás, hiszen a parametrikus módszerrel becsült kockázat lehet negatív. Így azt várjuk, hogy amennyiben a becsült kovarianciamátrix invertálható, azaz $N/T < 1$, a becsült optimum pozitív valószínűséggel létezni fog, ugyanakkor továbbra is igaz lesz, hogy kisebb konfidenciaszint mellett nagyobb a negatív kockázat valószínűsége, tehát alacsonyabb lesz a kritikus N/T érték. A (7.41) egyenlet és a 7.1. ábra pontosan megfelel ennek a várakozásnak: az r_c kritikus pont az α konfidenciaszint monoton növekvő függvénye, és az $\alpha \rightarrow 1$ határesetben $r_c \rightarrow 1$.

9.3. Összefoglalás

Megmutattuk, hogy a koherens kockázati mértékeket definiáló axiómák közül a monotonitás és a szubaditivitás ahhoz vezet, hogy bizonyos feltételek mellett az adott kockázati mérték szerint nincsenek optimális portfóliók, mert a kockázatot minden határon túl lehet csökkenteni és/vagy a várható hozamot növelni.

A monoton mértékek esetén ez akkor lehetséges, ha a piacon van arbitrázslehetőség. Habár egy idealizált (likvid, stacionárius folyamatokkal jellemezhető, stb.) piacon az arbitrázslehetőségek valóban tetszőlegesen nagy hozamot jelentenének, a valóságban az ilyen lehetőségek ritkák (de előfordulhatnak), átmenetiek, és csak véges nagyságú nyereséget tesznek lehetővé, hiszen az arbitrázs kihasználásával a befektetők automatikusan meg is szüntetik azt. A problémát alapvetően tehát nem önmagában a monotonitás okozza, hanem a kockázatmérés statikus elméletének háttéréül szolgáló, erősen leegyszerűsített piaci modell.

A szubaditív mértékek esetén az arbitrázs létezése sem szükséges feltétele annak, hogy ne legyen optimum, ehhez elég, ha létezik olyan portfólió, amely nem igényel kezdőtőkét és kockázata negatív. Számos egyéb érv mellett ez a tény is alátámasztja, hogy a negatív kockázatnak nincs értelme, különösen olyan termékek esetében, amelyekre a veszteség valószínűsége pozitív.

A fejezet második felében megvizsgáltuk, hogy a kockázat véges mintából történő becslése esetén milyen feltételek mellett létezik, illetve nem létezik optimális portfólió. Azt találtuk, hogy a fentiekhez hasonlóan az optimum létezése a kockázatbecslő függvény monotonitásával és szubaditivitásával kapcsolatos. Fontos különbség azonban, hogy monoton becslőfüggvények esetén akkor nincsenek hatékony portfóliók, ha a használt minta alapján létezik *látszólagos* arbitrázs. Véges mintán akkor is találhatunk látszólagos arbitrázslehetőséget, ha valójában nincs arbitrázs, és ez akár számottevő valószínűséggel is bekövetkezhet, így könnyen előfordulhat, hogy a becsült optimumot akkor sem tudjuk meghatározni, ha a valódi optimum létezik. Ugyanez a probléma a szubaditív becslőfüggvények esetén is felmerül, hiszen becsült kockázat akkor is lehet negatív, ha a valódi kockázat pozitív.

A fenti problémák a gyakorlatban ritkán manifesztálódnak, mert a kereskedésre vonatkozó korlátozások (pl. a rövidere eladás tiltása, kereskedési limitek) a lehetséges portfóliók halmazát kom-

pakttá teszik, ami mindig garantálja az optimum létezését. Ez azonban a fent tárgyalt instabilitást nem szünteti meg, csupán elrejtí, mert így az optimális portfólió súlyokat nem a kockázat tényleges minimuma, hanem az önkényesen kiszabott korlátok határozzák meg, és ez annál inkább így van, minél kisebb mintát használunk a becsléshez [61]. Az instabilitás önkényes mellékfeltételekkel történő elrejtése helyett tehát kívánatosabb lenne újragondolni a kockázatmérés és -kezelés elméleti alapjait.

A fejezet eredményei alapján tehát megpróbálhatjuk körvonalazni, hogy egy adekvát kockázatmérési technikának milyen alapvető kritériumokat kell teljesítenie:

- Figyelembe kell vennie a piac dinamikáját. Az egyetlen periódusra, illetve a kizárólag a pillanatnyi pozícióra koncentráló kockázatmérési és -kezelési technikák nem kielégítőek.
- Számot kell adnia a likviditási kockázatról. Ez kizárja a szubadditivitást és a homogenitást.
- Tükröznie kell a diverzifikáció kockázatsökkentő hatását. Egy jó kockázati mérték tehát konvex.
- A negatív kockázat nem értelmes. Minden pozíció kockázata pozitív vagy zérus kell, hogy legyen. Az arbitrázslehetőségek és a kockázatmentes termékek kockázata egyaránt zérus. Egy kockázati mértéknek nem kell feltétlenül számot adnia arról, hogy melyik befektetéssel kereshetünk többet. (Ez már a portfólióválasztási probléma hatásköre.) Ez a kritérium kizárja a transláció invarianciát, így a tőke megfelelési szabályok és a kockázatmérés kapcsolatát is újra kell gondolnunk.
- Ha létezik tartós és korlátlan arbitrázslehetőség, akkor ne létezzenek hatékony portfóliók. Amennyiben ezt a helyzetet el szeretnénk kerülni, akkor a piaci folyamatok modelljén kell változtatnunk (tehát az arbitrázslehetőségét kell kiiktatnunk), nem pedig a kockázati mértéken (úgy hogy arbitrázs esetén is garantálja az optimum létezését).
- A fentiek fényében a monotonitás továbbra is kívánatos tulajdonság, a szigorú monotonitás azonban nem. Két garantált, de eltérő hozamú befektetés kockázata például egyaránt tekinthető zérusnak. Racionális befektető természetesen a nagyobb hozamút választja, de ez ismét a portfólióválasztási feladat hatáskörébe tartozó kérdés.

A fenti kritériumok tehát kiindulópontot jelenthetnek a kockázatmérés és -kezelés a mainál helyesebb technikáinak kidolgozásához, ami igen érdekes és meglehetősen nehéz kutatási téma, és ami a közelmúltban kitört pénzügyi válság fényében különleges aktualitással és jelentőséggel bír.

10. fejezet

Kitekintés

A korábbi fejezetekben tárgyalt problémák számos további kérdést és lehetséges kutatási témát vetnek fel. A következő szakaszban először röviden áttekintünk ezek közül néhányat, majd a fejezet hátralévő felében megvizsgáljuk, hogy a dolgozat eredményeinek milyen, a pénzügyi elméleten túlmutató tanulságai lehetnek.

10.1. További kutatási irányok

10.1.1. Elliptikus eloszlások

A 6. és 7. fejezetekben feltettük, hogy az értékpapírok normális eloszlásúak. Mint többször kifejtettük, ez nem fedi a valóságot, így magától értetődik, hogy a portfólióválasztás zajérzékenységét érdemes nem-gaussi árfolyammozgásokra is megvizsgálni. Ennek egy lehetséges módját láttuk a 8. fejezetben, de érdekes lenne tanulmányozni a stacionárius, de hosszú farkú eloszlással rendelkező fluktuációkat is. Ezek egy fontos alosztályát alkotják az elliptikus eloszlások.

Elliptikusnak nevezzük azokat a többváltozós eloszlásokat, amelyekre a sűrűségfüggvény nívófelületei ellipszoidok. Ezek közé tartozik a normális eloszlás mellett számos hosszú farkú eloszlás is, például az ún. Student-t eloszlások. Az elliptikus eloszlások karakterisztikus függvénye

$$\varphi(\mathbf{k}) = \exp \left[i \sum_i k_i \mu_i + \psi \left(\sum_{i,j} k_i \Sigma_{ij} k_j \right) \right] \quad (10.1)$$

alakú, ahol μ_i -k a várható értékek, Σ_{ij} pedig az ún. diszperziós mátrix. Normális eloszlás esetén például $\psi(x) = \frac{1}{2}x$, és a diszperziós mátrix megegyezik a kovariancia mátrixszal (ez más elliptikus eloszlásokra nem igaz).

Amennyiben a 6. fejezetben ismertetett levezetést meg szeretnénk ismételni tetszőleges elliptikus eloszlásra, a replika-állapotösszeget (6.14) helyett az (10.1)-ből számolt sűrűségfüggvénnyel kell átlagolnunk, amely egy Dirac- δ függvény Fourier-transzformáltjának beszűrésével, és \mathbf{k} szerinti

integrál elvégzésével az alábbi alakra hozható:

$$f(\mathbf{x}) \propto \int_{-\infty}^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} d\hat{u} \exp \left[\psi(u) + u\hat{u} - \frac{\hat{u}}{2} \sum_{i,j} (x_i - \mu_i) \Sigma_{ij}^{-1} (x_i - \mu_i) \right]. \quad (10.2)$$

Ez sok hasonlóságot mutat a normális eloszlás sűrűségfüggvényével. Mivel az \hat{u} szerinti integrál kontúrját megváltoztathatjuk oly módon, hogy \hat{u} valós része mindig pozitív legyen és csak $\pm i\infty$ -ben simuljon bele a képzetes tengelybe, ezért a \mathbf{x} szerinti integrált hagyományos Gauss-integrálként kezelhetjük. Így a 6. fejezet levezetését lépésről lépésre megismételhetjük, csak arra kell odafigyelnünk, hogy a számítások végén az u és \hat{u} szerinti integrálokat is meg kell határoznunk (akár expliciten, akár nyeregpontról módszerrel). Ily módon q_0 viselkedése elliptikus eloszlásokra is meghatározható, ami sejtésünk szerint nem fog különbözni a gaussi esettől.

10.1.2. A rövidre eladás korlátozása

A portfóliósúlyokra a gyakorlatban alkalmazott megkötések közül az egyik leggyakoribb és legegyszerűbb a rövidre eladás kizárása. Matematikailag ez a minden i -re $w_i \geq 0$ feltétel kirovását jelenti, ami egyrészt megszünteti a probléma differenciálhatóságát, másrészt látszólag csökkenti a portfólióbecslés instabilitását, hiszen nem engedi a portfóliósúlyokat minden határon túl nőni. Gulyás és Kondor numerikus eredményei szerint azonban ez a hibacsökkenés csupán illúzió [61], mert a lineáris korlátok eredményeképpen az optimális portfólióvektor sok esetben a korlátok által definiált poliéder oldalaira kerül, ráadásul a minta ingadozásával teljesen véletlenszerűen annak egyik oldaláról a másikra ugrál.

A replika módszer segítségével ez a jelenség valószínűleg analitikusan is megragadható. A rövidre eladás tiltása miatt a Markowitz-feladathoz rendelt (6.2) és (6.13) állapotösszegben a w_i portfólió súlyokra nem $-\infty$ -tól ∞ -ig, hanem 0-tól ∞ -ig (vagy a költségvetési korlát miatt ezzel ekvivalens módon 0-tól 1-ig) kell integrálnunk. Ez a módosítás lényegesen elbonyolíthatja a számításokat, sőt valószínűleg oda vezet, hogy a problémának lesz replikaszimmetria-sértő fázisa. Ennek végiggondolása és [61] következtetéseinek alátámasztása rendkívül érdekes eredmény lenne.

10.1.3. A VaR historikus becslése

A 3. fejezetben említettük, hogy a VaR általában nem konvex kockázati mérték. Ez a nemkívánatos tulajdonság parametrikus becslés segítségével elnyomható (lásd 7. fejezet), ez azonban viszonylag erős a priori feltevéseket igényel az árfolyammozgásokat irányító folyamatokról. Ezért a historikus ES esetéhez hasonlóan [53] érdekes lenne végiggondolni, hogy megvizsgálható-e a historikus VaR optimalizációja a replika módszer segítségével. A VaR konvexitásának hiánya miatt ez a probléma minden bizonnyal replikaszimmetria-sértő megoldáshoz vezetne, ami újabb, potenciálisan érdekes betekintést engedne a VaR optimalizáció természetébe (és hátrányaiba).

10.1.4. Zajscökkenő módszerek

A replika módszer potenciálisan alkalmas lehet a zajscökkenő módszerek teljesítményének a jellemzésére, esetleg azok továbbfejlesztésére is. A véletlen mátrix elméleten alapuló módszereket a fizikusok már részletesen tanulmányozták, így a kutatást első sorban más módszerekre, pl. a Bayesian Shrinkage-re lenne érdemes kiterjeszteni.

10.2. A pénzügyi alkalmazásokon túl

10.2.1. Kvadratikus optimalizáció és portfólióválasztás

A korábbi fejezetekben láttuk, hogy a becsléshez használt megfigyelések számának csökkenésével az optimális portfólió mérési hibája divergál. Ez az instabilitás természetesen nemcsak a portfólióválasztási feladatban jelentkezik, hanem a pénzügyi elmélettől teljesen független alkalmazások igen széles körében is. A probléma ugyanis egész egyszerűen abból adódik, hogy az egymásra ható tényezők száma túl nagy a viselkedésükről rendelkezésre álló információhoz képest.

Fordítsuk le a fenti, igen általános állítást konkrét matematikai képletekre és tekintsük például a kvadratikus optimalizációs feladatot tetszőleges lineáris mellékfeltételekkel [62]:

$$\min_{\xi \in \Xi} \sum_{i,j=1}^N S_{ij} \xi_i \xi_j + \sum_{i=1}^N h_i \xi_i, \quad (10.3)$$

$$\sum_{j=1}^N A_{kj} \xi_j = b_k, \quad (10.4)$$

ahol a változók száma N , a mellékfeltételek száma K , tehát (10.4)-ben $k = 1, 2, \dots, K$. Az S_{ij} , h_j , A_{kj} és b_k a modell paraméterei, amelyeket a konkrét alkalmazástól függően előre megadhatunk, illetve (legalábbis részben) mintából becsülhetünk. A ξ optimalizálandó vektor lehetséges értékeit a $\Xi \subset \mathbb{R}^N$ halmaz tartalmazza. A kvadratikus optimalizáció közismert jellemzője, hogy amennyiben az S_{ij} mátrix szigorúan pozitív definit, a (10.3) feladatnak létezik egyértelmű megoldása. A (2.10)-(2.12) egyenletekkel definiált klasszikus Markowitz-probléma a fenti feladat speciális esete az $S_{ij} = \sigma_{ij}$, $h_i = 0$, $A_{1j} = \mu_j$, $A_{2j} = 1$, $b_1 = \mu$ és $b_2 = 1$ választással. Véges mintából történő becslés esetén a feladat alakja természetesen nem változik, csak a σ_{ij} és μ_i paraméterek helyére a becsült $\hat{\sigma}_{ij}$ és $\hat{\mu}_i$ értékeket kell helyettesíteni.

A (10.3) kvadratikus optimalizációs problémának egy további, igen fontos esete a lineáris regresszió, melynek során a

$$Y = \beta_0 + \sum_{i=1}^M \beta_i X_i + \varepsilon \quad (10.5)$$

alakú lineáris modellek β_0 , β_1 , stb. paramétereit becsüljük az Y és \mathbf{X} változók véges számú, y_t és x_{it} múltbeli realizációja alapján ($t = 1, 2, \dots, T$). Az ε mennyiséget (általában normális eloszlású, zérus várható értékű) véletlen változónak tekintjük, és a modellparamétereket ε (realizált) varianciájának minimalizálásával határozzuk meg. A célfüggvény tehát $\mathbb{E} \left[(Y - \beta_0 - \sum_i \beta_i X_i)^2 \right]$,

amiből az $S_{M+1,M+1} = 1$, $S_{M+1,i} = S_{i,M+1} = \mathbb{E}[X_i]$, $S_{ij} = \mathbb{E}[X_i X_j]$, $h_{M+1} = \mathbb{E}[Y]$ és $h_i = \mathbb{E}[Y X_i]$ helyettesítéssel kapjuk a (10.3) általános formulát. (A lineáris regresszió esetében nincsenek mellékfeltételek.) Ezeket a várhatóértékeket a gyakorlatban általában mintából kell becsülnünk, de ez a megoldandó kvadrátikus optimalizációs probléma alakján nem változtat.

Közismert tény, hogy egy (10.3)-(10.4) alakú feladat változóhelyettesítésekkel vagy új változók bevezetésével számos ekvivalens alakba átirható, hiszen a Lagrange-multiplikátor módszer lehetővé teszi, hogy a célfüggvényben szereplő lineáris tagok számának növelésével (csökkentésével) a mellékfeltételek számát csökkentsük (illetve növeljük). Ennek alapján kimutatható például, hogy a portfólió optimalizációs probléma és a lineáris regresszió matematikailag ekvivalensek egymással [63].

Így tehát a Markowitz-feladat zajérzékenységére vonatkozó összes eredmény, amelyet a dolgozat során idéztünk, illetve levezettünk, változtatás nélkül érvényes a lineáris regressziós problémára is. Az ε hibátig mintából becsült értékeit $\hat{\varepsilon}_t$ -vel jelölve a lineáris regresszió zajérzékenységét a

$$q_0 = \sqrt{\frac{\mathbb{E}\left[\frac{1}{T-1} \sum_t \hat{\varepsilon}_t^2\right]}{\mathbb{E}[\varepsilon^2]}} \quad (10.6)$$

formulával definiálhatjuk, amelyről elemi számolással megmutatható, hogy azonos a (4.6) formulával. A 4.1.2. szakaszban és a 6. fejezetben ismertetett eredmények így érvényben maradnak (10.6)-ra is.

Értelmezzük tehát q_0 korábban megismert viselkedését a jelen kontextusban. Amíg kevés változónk van és relatíve sok megfigyelésünk (és a változók közötti összefüggés valóban megfelel a (10.5) modellnek), addig a lineáris regresszió segítségével a regressziós egyenletet viszonylag jól tudjuk becsülni. Ez általában teljesül a lineáris regresszió klasszikus alkalmazásaira, például egyes fizikai, kémiai jelenségek kísérleti úton történő mérésekor, ahol az összefüggésekről igen pontos modellünk van, és elvileg annyi mérést végezhetünk, ahányat csak akarunk. Ezzel ellentétben azonban a helyzet sokváltozós, komplex modellek esetében, amilyenek például a biológiában, genetikában, orvostudományban, gazdaságtudományban vagy egyéb társadalomtudományokban merülnek fel. Ilyenkor a becslési hiba még abban a ritka esetben is igen nagy lehet, amikor a modell linearitása egyáltalán helytálló feltételezés.

10.2.2. Kapocs a fizika és a matematikai statisztika között

Az élet különböző területein alkalmazott matematikai modellek empirikus adatokhoz való illesztése persze csak az esetek egy részében vezet kvadrátikus optimalizációs feladatra. Érdemes ezért a fenti gondolatmenetet általánosan megfogalmaznunk. Képzeljünk el tehát egy tetszőleges optimalizációs feladatot, amelynek a célfüggvénye $\mathcal{H}(\xi; \mathbf{p})$, ahol a ξ és \mathbf{p} N , illetve P dimenziós vektorok. A minimalizációt a ξ változókban végezzük, míg \mathbf{p} elemei a modell konstans paraméterei. Feltesszük ugyanakkor, hogy a \mathbf{p} vektort általában nem ismerjük pontosan, csak annak egy $\hat{\mathbf{p}}$ becsült értékét. Ez a becsült paraméter-vektor tehát véletlen változó, hiszen értéke mintáról mintára ingadozik.

A korábbi példákra visszautalva, a portfólió optimalizáció esetében ξ a portfólió súlyoknak,

$\hat{\mathbf{p}}$ pedig a hozameloszlás paramétereinek (várható érték, varianciák, kovarianciák) felel meg, míg a lineáris regresszió esetében az előbbi a regressziós együtthatók vektora, az utóbbi pedig a modellben szereplő \mathbf{X} és Y változók eloszlásának paramétereit foglalja össze. Ezzel teljesen analóg módon illeszkednek a képbe a nemlineáris regressziós modellek, ezekre persze a minimalizálandó hibafüggvény már nem lesz kvadrátikus. A különböző alkalmazási területekről származó példák sora természetesen vég nélkül folytatható.

A $\mathcal{H}(\boldsymbol{\xi}; \mathbf{p})$ célfüggvény segítségével megadhatjuk a becslési hiba mértékének általános definícióját. A valódi \mathbf{p} modellparaméterek ismeretében lehetőség nyílik a \mathcal{H} valódi optimumának meghatározására is. Jelölje ezt az optimumot $\boldsymbol{\xi}^*$ (feltéve persze hogy létezik és egyértelmű). Ha azonban \mathbf{p} helyett csak a becslt, $\hat{\mathbf{p}}$ paramétereket ismerjük, akkor az együtthatók értékét $\mathcal{H}(\boldsymbol{\xi}; \hat{\mathbf{p}})$ minimalizálásával kell közelítenünk. Jelöljük ezt a közelítést $\hat{\boldsymbol{\xi}}^*$ -gal. Az eredeti $\mathcal{H}(\boldsymbol{\xi}; \mathbf{p})$ célfüggvény a $\hat{\boldsymbol{\xi}}^*$ helyen természetesen szuboptimális lesz, és a valódi optimumtól vett relatív „távolságot” felhasználhatjuk a becslési hiba mérésére:

$$q_0 = \frac{\mathcal{H}(\hat{\boldsymbol{\xi}}^*; \mathbf{p})}{\mathcal{H}(\boldsymbol{\xi}^*; \mathbf{p})}. \quad (10.7)$$

Fontos kiemelni, hogy a fenti definíciójában a számlálóban és a nevezőben is az igazi \mathbf{p} paraméter-értékek szerepelnek, hiszen az optimalizáció valódi – nem pedig becslt – hibáját szeretnénk mérni. Könnyen belátható, hogy q_0 különböző modellekre bevezetett definíciói, nevezetesen (4.6), (7.14), (8.7), (8.8) és (10.6) mind (10.7) speciális esetei. Még egyszer hangsúlyozzuk, hogy q_0 a becsléshez használt megfigyelések függvénye, értéke tehát mintáról mintára ingadozik.

Közismert tény, hogy az optimalizációs feladatok megfogalmazhatók statisztikus fizikai problémaként. A $\mathcal{H}(\boldsymbol{\xi}; \mathbf{p})$ célfüggvényt tekinthetjük ugyanis egy fizikai rendszernek, amely a $\boldsymbol{\xi}$ állapotvektorral és a \mathbf{p} modellparaméterekkel (pl. csatolási állandókkal és külső erőterekkel) jellemezhető. Ezt követően a „simulated annealing” [49] alap gondolatához hasonló módon egy fiktív hőmérséklet bevezetésével felírhatjuk a rendszer kanonikus állapotösszegét:

$$Z = \int \prod_{i=1}^N d\xi_i \exp[-\beta \mathcal{H}(\boldsymbol{\xi}; \mathbf{p})], \quad (10.8)$$

ahol β jelöli a fiktív hőmérséklet inverzét. Az eredeti optimalizációs probléma megoldását a zérus hőmérsékleti ($\beta \rightarrow \infty$) termodinamikai átlagok adják, amelyek a szabadenergia meghatározásával általában kényelmesen számíthatók.

Amennyiben a mintából becslt paraméterekkel kell dolgoznunk, (10.8)-ba \mathbf{p} helyére a becslt $\hat{\mathbf{p}}$ paramétereket kell helyettesítenünk, így az állapotösszeg, a szabadenergia, és a szabadenergiából származtatott termodinamikai átlagok mind a véletlen minta függvényei lesznek. A becslési hiba jellemzéséhez a minta-ingadozások feletti átlagokat kell meghatároznunk, ami teljesen analóg a spinűvek elméletében bevezetett „quenched average” kiszámításával. A 6. és 7. fejezetben (valamint [30]-ban és [53]-ben) bemutatott számítások éppen erre az analógiára épülnek.

A statisztikus fizika és az optimalizációs problémák közötti összefüggés persze néhány konkrét

alkalmazási területen (pl. mesterséges intelligencia, információelmélet, játékelmélet) már eddig is közismert volt. A lineáris regresszióval való párhuzam, és annak direkt általánosítása azonban fényt derít a statisztikus fizika és a hagyományos matematikai statisztika (illetve annak alkalmazott területei, pl. ökonometria) közötti szoros kapcsolatra, amely azonnal lehetővé teszi a statisztikus fizika teljes eszköztárának bevetését egy eddig csupán hagyományos matematikai módszerekkel vizsgált tudományterületen.

Az eddig elmondottak egyik legszembeszökőbb tanulsága, hogy komplex, sokváltozós modellek illesztése általában csak igen nagy mennyiségű információ (empirikus adat) alapján lehetséges, amely az esetek jó részében azonban nem áll rendelkezésre. Bármennyire nyilvánvalónak is tűnik ez a megállapítás, számtalan esetben nem fordítanak rá kellő figyelmet. Habár ez az attitűd bizonyos mértékig minden tudományterületen tetten érhető, néhány diszciplínában (első sorban a társadalomtudományokban, de bizonyos mértékig az orvostudományban, bioinformatikában, vagy a klímakutatásban is) hajlamos különösen aggasztó méreteket ölteni. Ennek fő oka talán az, hogy az érintett területeken korábban egyszerűbb modellekkel dolgoztak, és ezek esetében rendelkezésre álló adatok mennyisége kielégítő volt a modellváltozók számához képest, így a becslés pontosságát általában nem kellett behatóan megvizsgálni. Az utóbbi években azonban a modellek komplexitása, és a jelenségek magyarázatához használt változók száma a legtöbb alkalmazási területen drámaian megnőtt, viszont a statisztikai hiba kérdésére továbbra sem fordítanak az eddiginél nagyobb gondot.

A jelen dolgozatban a portfólió optimalizációra alkalmazott és a statisztikus becslés elméletére általánosított módszertan lehetőséget nyújt arra, hogy modelljeink elméleti és statisztikai korlátait még azelőtt felderítsük, hogy messzemenő következtetéseket vonnánk le belőlük, ami a manapság jellemző komplex modellek mellett kulcsfontosságú lenne. Különösen ígéretesnek tűnik a statisztikus fizikai módszerek alkalmazása például olyan problémák esetén, amelyeknek a hibafüggvénye nem konvex, hiszen a replika-módszer egyik legnagyobb erőnye éppen az, hogy a sok lokális minimummal rendelkező célfüggvényeket is igen hatékonyan tudja kezelni.

11. fejezet

Összefoglalás

A jelen értekezésben a különböző kockázati mértékek melletti portfólióválasztás becslési hibáját tanulmányoztuk statisztikus fizikai módszerekkel, majd megvizsgáltuk, hogy a koherens kockázati mértékek egyes axiómái miként befolyásolják a portfólió optimalizációs problémák stabilitását. A replika-módszer felhasználásával részletesen megvizsgáltuk a portfólió optimalizáció zajérzékenységet elsőként a szórás, majd a parametrikus módszerrel becsült Value-at-Risk, Expected Shortfall és szemivariancia alkalmazása mellett. Azt találtuk, hogy az Expected Shortfall historikus becsléséhez hasonlóan az optimum létezése a becsléshez használt véges mintától függ, továbbá az optimalizációban algoritmikus fázisátalakulás lép fel. A probléma paramétereinek terét ugyanis egy jól definiált kritikus görbe két tartományra osztja aszerint, hogy az optimalizáció megoldható-e, vagy sem, és belátható, hogy a megoldható fázisból a kritikus görbéhez közeledve a becslési hiba – a szakirodalomban korábban tárgyalt esetekhez hasonlóan – $-1/2$ -es hatványkitevővel divergál. Lényeges eredmény, hogy az Expected Shortfall historikus módszerrel történő becslésekor tapasztalt instabilitást a parametrikus becslés csak mérsékli, de nem szünteti meg.

A vizsgálatot Monte Carlo szimulációk segítségével elvégeztük abban az esetben is, amikor az árfolyammozgások GARCH-folyamatot követnek, és a kockázatot szórással mérjük. Azt találtuk, hogy amennyiben a befektető a GARCH hatással tisztában van, és a GARCH- és egyéb modellparamétereket véges mintából becsüli, akkor a becslési hiba nagy portfóliókra ugyanúgy viselkedik, mint a független, normális esetben, és a mintamérettel az értékpapírok számához közelítve a becslési hiba ismét $-1/2$ -es kitevővel divergál. Mindez arra enged következtetni, hogy a szakirodalomban és a dolgozatban tárgyalt modellek kritikus viselkedésük alapján mind ugyanabba az univerzalitási osztályba tartoznak.

Bebizonyítottuk továbbá, hogy a Value-at-Risk vagy az Expected Shortfall instabilitása nem csupán az adott kockázati mértékek egyedi jellemzője, hanem a koherencia axiómák között is szereplő monotonitási és/vagy szubadditivitási tulajdonság közvetlen következménye, a koherens mértékek tehát lényegükből fakadóan instabilak. Ennek fényében megneveztünk néhány olyan feltételt, amelyeket egy adekvát kockázati mértéknek teljesítenie kell.

A dolgozat befejezésekképpen megemlítettünk néhány további érdekes, megoldandó kérdést, és

kifejtettük, hogy az értekezésben használt módszerek miképpen alkalmazhatók a fizikán és pénzügyi elméleten kívüli problémákra.

Summary

In this thesis we used methods of statistical physics to study the problem of sampling error in portfolio selection under various risk measures, and examined how the axioms of coherence affect the instability of portfolio optimization problems. We employed the replica method for a detailed study of the noise sensitivity of standard deviation on the one hand, and that of Value-at-Risk, Expected Shortfall and semivariance on the other hand. We found that, similarly to the case of the historical estimation of Expected Shortfall, the existence of the optimum depends on the particular finite sample used for estimation, moreover the problem exhibits an algorithmic phase transition. The parameter space of the problem is divided into a feasible and a non-feasible region by a well defined critical curve, and it can be proved that – similarly to the cases discussed in the literature previously – the estimation error diverges with an exponent of $-1/2$, as we approach the critical curve from the feasible region. It is also important that the parametric estimation can only reduce the instability of historical Expected Shortfall, but cannot eliminate it.

By means of Monte Carlo simulations, we also carried out the study of the case when asset price movements follow a GARCH process, and the risk is measured by standard deviation. When the GARCH parameters are estimated from a finite sample, for large portfolios the estimation error behaves in the same fashion as for independent, identically distributed normal fluctuations, and again, the estimation error diverges with a power of $-1/2$ as the sample size approaches the number of securities. This supports our conjecture that the models discussed in the literature and in this thesis, respectively, belong to the same universality class, as far as their critical behaviour is concerned.

Moreover, we proved that the instability of Value-at-Risk and Expected Shortfall is not just an idiosyncratic property of these risk measures, but it is a direct consequence of two of the coherence axioms, namely subadditivity and monotonicity, therefore the coherent risk measures are inherently unstable. In the light of this, we proposed a few conditions to be satisfied by any adequate risk measure.

We concluded this thesis by briefly describing some further interesting problems to be solved, and we explained how the methods applied here can be used in problems outside physics and financial theory.

Köszönetnyilvánítás

Mindenekelőtt szeretném megköszönni témavezetőmnek, Kondor Imrének az eddigi közös munkát, az inspiráló beszélgetéseket, a kéziratok többszöri, türelmes átböngészését, illetve mindazt a szakmai és nem szakmai jellegű segítséget, amely nélkül ma nem tartanék itt. Remélem, hogy együttműködésünk a jövőben is folytatódik.

Köszönet illeti továbbá feleségemet, Kereszty Orsolyát, akinek a lelki és intellektuális támogatása nélkül ez az értekezés nem jöhetett volna létre.

Irodalomjegyzék

- [1] H. Markowitz. Portfolio selection. *Journal of Finance*, 7(1):77–91, 1952.
- [2] H. Markowitz. *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*. J. Wiley and Sons, New York, 1959.
- [3] Ph. Jorion. *VaR: The New Benchmark for Managing Financial Risk*. McGraw-Hill, New York, 2000.
- [4] I. Karatzas and J. Cvitanic. On dynamic measures of risk. *Finance and Stochastics*, 3:451–482, 1999.
- [5] T. Wang. A class of dynamic risk measures. Working paper, University of British Columbia, Jan 1999.
- [6] F. Riedel. Dynamic coherent risk measures. Working Paper 03004, Stanford University, Department of Economics, January 2003.
- [7] K. Detlefsen and G. Scandolo. Conditional and dynamic convex risk measures. *Finance and Stochastics*, 9(42):539–561, 2005.
- [8] H. Konno. Portfolio optimization using L_1 risk function. Technical Report IHSS 88-9, Institute of Human and Social Sciences, Tokyo Institute of Technology, 1988.
- [9] C. Acerbi. Coherent representation of subjective risk aversion. (<http://www.essex.ac.uk/ccfea/NewsEvents/seminarsetc/seminars/200607/presentations/Acerbi2.pdf>).
- [10] P. Artzner, F. Delbaen, J.-M. Eber, and D. Heath. Thinking coherently. *Risk*, 10(11):68–71, 1997.
- [11] P. Artzner, F. Delbaen, J.-M. Eber, and D. Heath. Coherent measures of risk. *Math. Fin.*, 9(3):203–228, 1999.
- [12] C. Acerbi, C. Nardio, and C. Sirtori. Expected Shortfall as a tool for financial risk management. Working paper, 2001. (<http://www.gloriamundi.org/detailpopup.asp?ID=453055940>).

- [13] C. Acerbi and D. Tasche. Expected Shortfall: a natural coherent alternative to value at risk. *Economic Notes*, 31(2):379–388, 2002.
- [14] C. Acerbi and D. Tasche. On the coherence of Expected Shortfall. *Journal of Banking and Finance*, 26(7):1487–1503, 2002.
- [15] R. T. Rockafellar and S. Uryasev. Optimization of Conditional Value-at-Risk. *Journal of Risk*, 2(3):21–41, 2000.
- [16] S. Pafka and I. Kondor. Noisy covariance matrices and portfolio optimization II. *Physica A*, 319:487–494, 2003.
- [17] Z. Burda, J. Jurkiewicz, and M. A. Nowak. Is econophysics a solid science? *Acta Physica Polonica B*, 34:87–132, 2003.
- [18] R. Kan and D. R. Smith. The distribution of the sample minimum variance frontier, 2007. (<http://ssrn.com/abstract=882015>).
- [19] L. Laloux, P. Cizeau, J.-P. Bouchaud, and M. Potters. Noise dressing of financial correlation matrices. *Phys. Rev. Lett.*, 83:1467, 1999.
- [20] L. Laloux, P. Cizeau, J.-P. Bouchaud, and M. Potters. Random matrix theory and financial correlations. *Int. J. Theor. Appl. Finance*, 3:391, 2000.
- [21] V. Plerou, P. Gopikrishnan, B. Rosenow, L. A. Nunes Amaral, and H.E. Stanley. Universal and non-universal properties of cross-correlations in financial time series. *Phys. Rev. Lett.*, 83:1471, 1999.
- [22] V. Plerou, P. Gopikrishnan, B. Rosenow, L. A. N. Amaral, T. Guhr, and H. E. Stanley. A random matrix approach to cross-correlations in financial data. *Phys Rev E*, 65:066136, 2002.
- [23] Z. Burda, A. Goerlich, A. Jarosz, and J. Jurkiewicz. Signal and noise in correlation matrix. *Physica A*, 343:295, 2004.
- [24] C. Stein. Proc. inadmissibility of the usual estimator for the mean of a multivariate normal distribution. In *Third Berkeley Symp. on Math. Statist. and Prob.*, volume 1, pages 197–206. Univ. of Calif. Press, 1956.
- [25] O. Ledoit and M. Wolf. A well-conditioned estimator for large-dimensional covariance matrices. *Journal of Multivariate Analysis*, 88(2):365–411, Feb 2004.
- [26] O. Ledoit and M. Wolf. Improved estimation of the covariance matrix of stock returns with an application to portfolio selection. *Journal of Empirical Finance*, 10(5):603–621, Dec 2003.
- [27] O. Ledoit and M. Wolf. Honey, I shrunk the sample covariance matrix. *Journal of Portfolio Management*, 31(1), 2004.

- [28] I. Kondor, S. Pafka, and G. Nagy. Noise sensitivity of portfolio selection under various risk measures. *Journal of Banking and Finance*, 31:1545–1573, 2007.
- [29] I. Kondor, S. Pafka, R. Karádi, and G. Nagy. Portfolio selection in a noisy environment using absolute deviation as a risk measure. In H. Takayasu, editor, *Practical Fruits of Econophysics*. Springer, 2006.
- [30] S. Ciliberti and M. Mézard. Risk minimization through portfolio replication. *European Physical Journal B*, 57:175–180, 2007.
- [31] M.R. Young. A minimax portfolio selection rule with linear programming solution. *Management Science*, 44:673–683, 1998.
- [32] R. F. Engle. Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of UK inflation. *Econometrica*, 50:987–1008, July 1982.
- [33] T. Bollerslev. Generalized autoregressive conditional heteroscedasticity. *Journal of Econometrics*, 31:307–327, June 1986.
- [34] R.F. Engle, D.M. Lilien, and R.P. Robbins. Estimating time varying risk premia in the term structure: The ARCH-M model. *Econometrica*, 55:391–407, 1987.
- [35] D.B. Nelson. Conditional heteroskedasticity in asset returns: A new approach. *Econometrica*, 59:347–370, 1991.
- [36] L.R. Glosten, R. Jagannathan, and D. Runkle. On the relation between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks. *Journal of Finance*, 48:1779–1801, 1993.
- [37] R.F. Engle and V.K. Ng. Measuring and testing the impact of news on volatility. *Journal of Finance*, 48:1749–1778, 1993.
- [38] T. Bollerslev, R. F. Engle, and J. M. Wooldridge. A capital asset pricing model with time-varying covariances. *Journal of Political Economy*, 96:116–131, 1988.
- [39] T. Bollerslev. Modelling the coherence in short-run nominal exchange rates: A multivariate generalized ARCH model. *Review of Economics and Statistics*, 72:498–505, 1990.
- [40] R. F. Engle. Dynamic conditional correlation – a simple class of multivariate GARCH models. *Journal of Business and Economic Statistics*, 20:339–350, 2002.
- [41] R. F. Engle and K. Sheppard. Theoretical and empirical properties of dynamic conditional correlation multivariate GARCH. Technical report, Mimeo, UCSD, 2001.
- [42] Y. K. Tse and A. K. C. Tsui. A multivariate GARCH model with time-varying correlations. *Journal of Business and Economic Statistics*, 20:351–362, 2002.

- [43] R. F. Engle and K. F. Kroner. Multivariate simultaneous generalized ARCH. *Econometric Theory*, 11(1):122–150, 1995.
- [44] R. F. Engle, V. K. Ng, and M. Rothschild. Asset pricing with a factor ARCH covariance structure: Empirical estimators for treasury bills. *Journal of Econometrics*, 45:213–237, 1990.
- [45] T. Kariya. MTV model and its application to the prediction of stock prices. In T. Pullila and S. Puntanen, editors, *Second International Tampere Conference in Statistics*, pages 161–176. University of Tampere, Finland, 1988.
- [46] C. Alexander and A. Chibumba. Multivariate orthogonal factor GARCH. Technical report, University of Sussex, Mimeo, 1997.
- [47] C. Alexander. A primer on the orthogonal GARCH model. Technical report, ISMA Centre, Mimeo, 2000.
- [48] L. Bauwens, S. Laurent, and J. Rombouts. Multivariate GARCH models: A survey. *Journal of Applied Econometrics*, 21(1):79–109, 2006.
- [49] S. Kirkpatrick. Optimization by simulated annealing - quantitative studies. *J. Stat. Phys.*, 34, 1984.
- [50] M. Mézard, G. Parisi, and M.A. Virasoro. *Spin Glass Theory and Beyond*, volume 9 of *World Scientific Lecture Notes in Physics*. Singapore, 1987.
- [51] K.H. Fischer and J.A. Hertz. *Spin Glasses*. Cambridge University Press, 1991.
- [52] M. Mézard and A. Montanari. *Information, Physics, and Computation*. Oxford University Press, 2009.
- [53] S. Ciliberti, I. Kondor, and M. Mézard. On the feasibility of portfolio optimization under Expected Shortfall. *Quantitative Finance*, 4:389–396, 2007.
- [54] G. Parisi. Infinite number of order parameters for spin-glasses. *Phys. Rev. Lett.*, 43:1754–1756, 1979.
- [55] D. Sherrington and S. Kirkpatrick. Solvable model of a spin-glass. *Phys. Rev. Lett.*, 35:1792–1796, 1975.
- [56] I. Varga-Haszonits and I. Kondor. The instability of downside risk measures. *J. Stat. Mech.*, (12):P12007, 2008.
- [57] I. Varga-Haszonits and I. Kondor. Noise sensitivity of portfolio selection in constant conditional correlation GARCH models. *Physica A*, 385:307–318, 2007.
- [58] C. Reese and B. Rosenow. Predicting multivariate volatility. cond-mat/0304082, 2003.
- [59] J. D. Noh. Multi-index shrinkage estimation: Theory and empirical tests. *Phys. Rev. E*, 61, 2000.

- [60] I. Kondor and I. Varga-Haszonits. Feasibility of portfolio optimization under coherent risk measures. arXiv:0803.2283v3 [physics.soc-ph], submitted to Quantitative Finance, 2008.
- [61] N. Gulyás and I. Kondor. Portfolio instability and linear constraints. To be published, 2008.
- [62] I. Kondor and I. Varga-Haszonits. Divergent estimation error in portfolio optimization and in linear regression. *Eur. Phys. J. B*, 64, 2008.
- [63] A. Kempf and C. Memmel. On the estimation of the global minimum variance portfolio. Working Paper DOI: 10.2139/ssrn.385760, February 2003.